

7 класс

7.1 Разрежьте квадрат 5×5 на прямоугольники 1×3 и 1×4 .

Решение:

1	1	1	1	2
4	5	6	7	2
4	5	6	7	2
4	5	6	7	2
4	3	3	3	3

Возможны и другие решения!

7.2 Для того чтобы купить квартиру, нужно взять или ровно 9 маленьких, 6 средних и один большой кредиты, или ровно 3 маленьких, 2 средних и 3 больших кредита. Какое количество только больших кредитов потребуется, чтобы купить квартиру?

Ответ: 4 больших кредита.

Решение: Маленький, средний и большой кредиты обозначим буквами m , c и b соответственно. Перепишем условие в этих обозначениях:

$$9m + 6c + b = 3m + 2c + 3b.$$

Сократив, получим $6m + 4c = 2b$ или $3m + 2c = b$, а значит, $3m + 2c + 3b = 4b$.

Критерии: Только ответ — 0 баллов.

Верно составленное уравнение — 1 балла.

7.3 Среди 9 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые же отличаются по весу друг от друга и от настоящих. Используя только чашечные весы без гирь, найдите хотя бы одну настоящую монету за четыре взвешивания.

Решение: Обозначим монеты числами от 1 до 9. Будем взвешивать монеты парами: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8. Если в одном из этих взвешиваний получили равенство чаш, значит обе монеты, участвующие в нём, настоящие. Иначе, настоящих монет в первых четырех взвешиваниях не больше четырех, следовательно, последняя монета — настоящая.

Критерии: Верный алгоритм — не менее 5 баллов.

7.4 Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD . Кроме того, периметр ACD равен периметру треугольника BCD . Докажите, что $AO = OB$.

Решение: Запишем равенство периметров, сложим два равенства и приведем подобные:

$$AB + BC + AC = BD + AB + AD$$

$$AC + CD + AD = BC + CD + BD$$

$$AB + BC + AC + AC + CD + AD = BC + CD + BD + BD + AB + AD$$

$$AC + AC = BD + BD$$

$$AC = BD$$

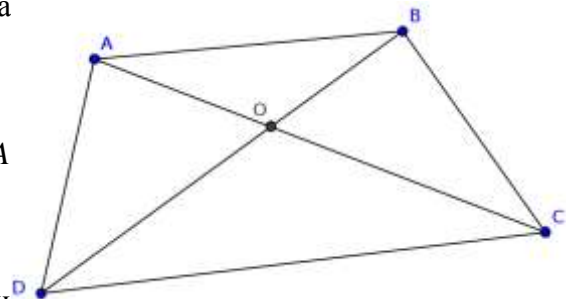
Используя это, приведем подобные в первом равенстве и получим

$$BC = AD.$$

Итак, $AC = BD$, $BC = AD$. Значит, треугольники ABC и BAD равны по трем сторонам. Таким образом, углы ABC и BAD равны, что значит, что треугольник ABO равнобедренный, и $AO = OB$.

Критерии: Доказано, что $AC = BD$ — 3 балла.

Выписано равенство периметров, дальнейших продвижений нет — 0 баллов.



7.5 В клетках квадрата 7×7 расставлены плюсы и минусы. Разрешается менять все знаки на противоположные в любой строке или любом столбце. Докажите, что такими действиями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

Решение: Рассмотрим какую-нибудь расстановку плюсов и минусов. Если в ней есть столбец (или строка), в котором плюсов меньше, чем минусов, то поменяем в нем (ней) все знаки на противоположные. При этом количество плюсов увеличится. Поступая так и далее, мы будем увеличивать количество плюсов в таблице. Поступать так бесконечно мы не можем (максимально возможное количество плюсов — 49), значит, когда-нибудь процесс остановится. Значит, мы получили расстановку, в которой в каждой строке и столбце количество плюсов больше числа минусов.

Критерии: В решении описан процесс, увеличивающий количество плюсов — не менее 5 баллов.