Решения задач Заключительного этапа

Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г.г. по математике

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Какие три цифры нужно дописать справа к числу 579, чтобы полученное шестизначное число делилось на 5, на 7 и на 9? Найти все возможные варианты ответа.

Ответ. (6,0,0),(2,8,5) или (9,1,5). Полученное число будет соответственно, равно 579600, 579285 или 579915.

Решение. Обозначим цифры, которые нужно приписать, как x, y, z по порядку слева направо, полученное 6-значное число будет таким: $\overline{579xyz}$. По признаку делимости на 5 имеем $z=0$ или $z=5$. По признаку делимости на 9 в первом случае $x+y$ даёт при делении на 9 остаток 6, а во втором случае остаток 1.

В первом случае $x+y$ равно 6 или 15. Остаток от деления числа $\overline{579xy0}$ столбиком на 7 равен остатку от деления на 7 числа $2+2x+3y$. Следовательно, либо $2+2x+3y=2+2x+3(6-x)=20-x$ делится на 7, откуда $x=6, y=0$, либо $2+2x+3y=2+2x+3(15-x)=47-x$ делится на 7, откуда $x=5, y=10$, что невозможно.

Во втором случае $x+y$ равно 1 или 10. Остаток от деления числа $\overline{579xy5}$ столбиком на 7 равен остатку от деления на 7 числа $2x+3y$. Следовательно, либо $2x+3y=2x+3(1-x)=3-x$ делится на 7, откуда $x=3, y=-2$, что невозможно, либо $2x+3y=2x+3(10-x)=30-x$ делится на 7, откуда $x=2, y=8$, или $x=9, y=1$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Потеря каждого решения – минус 2 балла. Необоснованность заявлений типа «$x+y$ равно 6 или 15» - минус 1 балл.

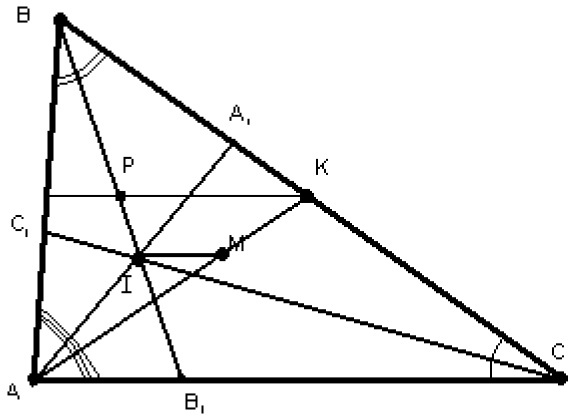
11.2. Найдите все тройки действительных чисел таких, что каждое из этих чисел равно квадрату разности двух других.

Ответ. (0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1).

Решение. Запишем условие в виде системы уравнений от искомых неизвестных x, y, z так: $x=(y-z)^2, y=(x-z)^2, z=(x-y)^2$. Вычтем второе уравнение из первого, третье из первого и третье из второго, получим три уравнения – следствия:
$x-y=(x-y)(2z-x-y), x-z=(x-z)(2y-x-z), y-z=(y-z)(2x-y-z)$. Если переменные попарно не равны, то, сокращая первые скобки, получим: $2z-x-y=2y-x-z=2x-y-z=1$. Сложив три полученных равенства, имеем 0=3 – противоречие. Следовательно, среди переменных есть равные. Пусть,

скажем, $x = y$. Тогда из третьего уравнения исходной системы $z = 0$, и из первого $x = x^2$, откуда $x = y = 0$ или $x = y = 1$. Аналогично рассматриваются равенства остальных переменных. Проверка показывает, что найденные тройки чисел являются решениями системы.
Оценивание. Просто ответ с проверкой: 0 баллов. Потеря каждого решения – минус 2 балла. Необоснованные сокращения скобок – минус 3 балла.

11.3. Периметр треугольника *ABC* равен 24 см, а отрезок, соединяющий точку пересечения его медиан с точкой пересечения его биссектрис, параллелен стороне *AC*. Найти длину *AC*.
Ответ. 8 см.
Решение. Обозначим через АК медиану из вершины А, через М - точку пересечения медиан АВС, через I – точку пересечения его биссектрис AA_1, BB_1, CC_1. Проведём через К прямую параллельно АС, пересекающую биссектрису BB_1 в точке Р – её середине. По теореме Фалеса, $PI : IB_1 \quad KM : MA \quad :2$, поэтому $BI : IB_1 \quad 2:1$. По свойству биссектрис AI и CI в треугольниках ABB_1 и CBB_1 имеем $AB : AB_1 \quad BI : IB_1 \quad CB : CB_1 \quad 2:1$. Отсюда $AC = \frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{1}{3}(AB + BC + AC) = 8$.



Оценивание. Просто ответ: 0 баллов. Нахождение отношения $BI : IB_1 \quad 2:1$: 3 балла. Нахождение отношений $AB : AB_1 \quad BI : IB_1 \quad CB : CB_1 \quad 2:1$: 2 балла.

11.4. На сфере отмечена точка *M*. Рассмотрим все тройки точек *A,B,C* на сфере, отличных от *M*, таких, что отрезки *MA, MB, MC* попарно перпендикулярны, и для каждой такой тройки рассмотрим плоскость, проходящую через *A,B,C*. Докажите, что все эти плоскости проходят через некоторую общую точку.
Решение. Рассмотрим произвольную тройку точек *A, B, C*, удовлетворяющую условию и точку *N*, лежащую в плоскости *MAB*, являющуюся вместе с точками *M, A, B* четвёртой вершиной прямоугольника *MABN*. Точка *N* лежит на окружности с диаметром *AB*, то есть, на описанной окружности треугольника *MAB*. Данная окружность является сечением сферы плоскостью *MAB* и лежит на сфере. Следовательно, точка *N* тоже лежит на сфере. Проделав подобные рассуждения ещё пять раз, мы получим, что вершины прямоугольного параллелепипеда, построенного на репере *MABC*, лежат на сфере. Центр *O* этого параллелепипеда равноудалён от его вершин, значит, совпадает с центром сферы. Теперь используем известное свойство параллелепипеда: плоскость *ABC* делит его главную диагональ с началом в *M* в отношении 1 к 2, считая от *M*. Значит, данная плоскость делит отрезок *MO* в отношении 2 к 1, считая от *M*. Таким образом, произвольная рассматриваемая в условии плоскость проходит через общую точку *P*, делящую отрезок *MO* в отношении 2 к 1, считая от *M*.

Оценивание. Построен параллелепипед и доказано, что все его вершины лежат на сфере: 2 балла. Показано, что центры параллелепипеда и сферы совпадают: 1 балл.
Замечание: Задача без особых проблем решается координатным методом: вводим систему координат с началом M, осями MA, MB и MC, записываем уравнение плоскости ABC в отрезках на осях и параметрическое уравнение прямой MO, находим, что данная плоскость делит отрезок MO в отношении 2 к 1, считая от M. Тогда, за введение таких координат: 0 баллов, за уравнение плоскости: 2 балла, за уравнение прямой MO: 1 балл.

11.5. Доказать, что среди пяти произвольных вершин правильного (все стороны и все углы которого равны) 15-ти угольника всегда найдутся три, являющихся вершинами равнобедренного треугольника.
Решение. Длины сторон и диагоналей правильного 15-угольника могут принимать 7 возможных значений. Пять выбранных вершин соединяются между собой десятью отрезками, поэтому между их длинами будут совпадения.
1) Если равны длины трёх из этих отрезков, то два из них имеют общую вершину, их концы и образуют равнобедренный треугольник.
2) Если совпадают только длины пар отрезков, то есть не менее трёх разных пар равных по длине отрезков, в каждой паре концы отрезков различны. Заметим, что в четырёхугольнике, образованном концами двух отрезков AB и CD равной длины, есть ещё пара отрезков равной длины и два отрезка разной длины. Если AB и CD стороны этого четырёхугольника, то совпадать по длине будут ещё и его диагонали, а не совпадать – другая пара сторон. А если AB и CD – диагонали, то совпадать по длине будет ещё одна из пар сторон, а не совпадать – другая – это следует из нечётности количества сторон в правильном 15-угольнике. Кроме того, в любом треугольнике, образованном тремя из вершин A,B,C,D есть по одному отрезку из каждой пары равных.
Поскольку пар равных отрезков не менее трёх, то есть не менее двух четырёхугольников с вершинами в некоторых из выбранных 5 вершин, в каждом из которых по две пары равных отрезков, соединяющих вершины.
В таком случае в треугольнике, лежащем в обоих этих четырёхугольниках, есть представители четырёх пар отрезков равных длин. По принципу Дирихле это значит, что есть не менее трёх отрезков равной длины с концами в выбранных 5 вершинах, два из которых и образуют, как показано в п. 1), искомый равнобедренный треугольник.
Оценивание. Замечено, что три равных диагонали приводят к равнобедренному треугольнику: 1 балл.
Замечено, что в четырёхугольнике, образованном концами двух отрезков AB и CD равной длины, есть ещё пара отрезков равной длины и два отрезка разной длины: 2 балла. Замечено, что в любом треугольнике, образованном тремя из вершин A,B,C,D есть по одному отрезку из каждой пары равных: 1 балл.