Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^3}{y^4}$, где x и y - некоторые натуральные числа?

Ответ. Любое натуральное число.

Решение. Пусть n - произвольное натуральное число. Положим $x = n^3$, $y = n^2$, тогда $\frac{x^3}{y^4} = \frac{n^9}{n^8} = n$.

11.2. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины *A*, равен 60 градусов. Найти углы треугольника *ABC*.

Ответ. 20, 20 и 140 градусов.

Решение. Пусть *AP* и *AM* — соответственно высота и биссектриса, проведённые из вершины *A*. Обозначим величину угла *BAC* за x, тогда $\angle PAC = 90^\circ - x$ и $\angle MAC = \frac{x}{2}$.

1) Пусть сначала точка *M* принадлежит отрезку *PC*, это имеет место при $\angle MAC = \frac{x}{2} \le \angle PAC = 90^\circ - x$, то - есть, при $x \le 60^\circ$. Тогда

$$\angle PAM = \angle PAC - \angle MAC = 90^\circ - x - \frac{x}{2} = 60^\circ,$$

откуда $x = 20$.

2) В оставшемся случае $x > 60^\circ$ точка *P* принадлежит отрезку *MC*. Тогда $\angle PAM = \angle MAC - \angle PAC = \frac{x}{2} - 90^\circ + x = 60^\circ$, откуда $x = 100^\circ$, что невозможно для угла при основании равнобедренного треугольника.

11.3. Найти все решения уравнения: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}$ в действительных числах. Здесь $[x]$ – целая часть x – обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}$ – дробная часть x – равна $x - [x]$. Например, $[\sqrt{2}] = 1, \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \{\sqrt{10}\} = \sqrt{10} - 3$.

Ответ. $\frac{29}{12}, \frac{19}{6}, \frac{97}{24}$.

Решение. Ввиду того, что $0 \le \{x\} < 1$, правая часть уравнения находится в пределах $\frac{1}{3} \le \{x\} + \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$. Это значит, что x положителен. С учётом неравенства нулю знаменателей левой части имеем $x \ge 1$. С другой стороны, функция $[x]$ – возрастающая, поэтому при $x \ge 5$ левая часть уравнения не превосходит $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$. Таким образом, решения уравнения лежат в интервале $1 \le x < 5$. Остаётся аккуратно рассмотреть все случаи.

1) Пусть $1 \le x < \frac{3}{2}$, тогда $[x] = 1, [2x] = 2$ и $\{x\} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \ge 1$, что невозможно.

2) Пусть $\frac{3}{2} \le x < 2$, тогда $[x] = 1, [2x] = 3$ и $\{x\} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 1$, что тоже невозможно.

3) Пусть $2 \le x < \frac{5}{2}$, тогда $[x] = 2, [2x] = 4$ и $\{x\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$, что даёт решение $x = 2 + \frac{5}{12} = \frac{29}{12}$.

4) Пусть $\frac{5}{2} \le x < 3$, тогда $[x] = 2, [2x] = 5$ и $\{x\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{10} - \frac{1}{3} = \frac{11}{30} < \frac{1}{2}$, что является посторонним в данном случае.

5) Пусть $3 \le x < \frac{7}{2}$, тогда $[x] = 3, [2x] = 6$ и $\{x\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$, что даёт решение $x = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$.

6) Пусть $\frac{7}{2} \le x < 4$, тогда $[x] = 3, [2x] = 7$ и $\{x\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} = \frac{1}{7} < \frac{1}{2}$, что является посторонним в данном случае.

7) Пусть $4 \le x < \frac{9}{2}$, тогда $[x] = 4, [2x] = 8$ и $\{x\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24} < \frac{1}{2}$, что даёт решение $x = 4 + \frac{1}{24} = \frac{97}{24}$.

8) Пусть $\frac{9}{2} \le x < 5$, тогда $[x] = 4, [2x] = 9$ и $\{x\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{13}{36} - \frac{1}{3} = \frac{1}{36} < \frac{1}{2}$, что является посторонним в данном случае.

11.4. Известно, что длины сторон треугольника – последовательные натуральные числа, а радиус его вписанной окружности равен 4. Найти радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ. $\frac{65}{8}$.

Решение. Пусть длины сторон равны $n-1, n, n+1$ для некоторого натурального n. По формуле Герона площадь треугольника $S = \sqrt{\frac{3n^2}{4}(\frac{n^2}{4} - 1)} = \frac{1}{2} P \times r = \frac{3}{2} n \times 4 = 6n$, откуда $n = 14, S = 84$. Подставим это в формулу $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$.

11.5. Решить в целых числах уравнение: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$.

Ответ. (x,y,z)=(2,2,3),(1,3,8),(1,4,5),(-4,1,1) и все перестановки этих троек. Всего 18 решений.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a\le b\le c$.

Заметим, что, если $x<0$, то $1+\frac{1}{x}<1$, а, если $x\ge 1$, то $1+\frac{1}{x}\le 2$. Следовательно, среди чисел $a\le b\le c$ не более одного отрицательного.

1) Пусть $a<0<b\le c$. Если $1<b\le c$, то $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})<(1+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}<3$. Если $1=b<c$, то $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})<2(1+\frac{1}{2})=3$. Следовательно, в этом случае имеем единственную возможность $a=-4, b=c=1$.

2) Пусть $1\le a\le b\le c$. Если $3\le a\le b\le c$, то $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})<(1+\frac{1}{3})^3=\frac{64}{27}<3$, следовательно, $a\le 2$.

А) Пусть $a=1$, тогда $(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})=\frac{3}{2}$. Если $5\le b\le c$, то $(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})\le\frac{36}{25}$.
Перебор случаев $b=1,2,3,4$ даёт два решения: $a=1, b=3, c=8$ и $a=1, b=4, c=5$.

Б) Пусть $a=2$, тогда $(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})=2$. Если $4\le b\le c$, то $(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})\le\frac{25}{16}<2$.
Перебор случаев $b=2,3$ даёт одно решение: $a=2, b=2, c=3$.