11 класс

11.1. Добытая руда содержит 21% меди, обогащённая - 45% меди. Известно, что в процессе обогащения 60% добытой руды идёт в отходы. Определить процентное содержание руды в отходах.

Ответ. 5%.

Решение. В добытых 100 кг руды содержится 21 кг меди. Из этих 100 кг обогащённой руды получится 40 кг, в ней будет содержаться 18 кг меди. Следовательно, ушедшие в отвал 60 кг отходов содержат 3 кг меди, то есть 5%.

11.2. Сколько решений имеет система уравнений $\left\{\begin{matrix} x^2-y^2=0, \\ (x-a)^2+y^2=1. \end{matrix}\right\}$ в зависимости от параметра a ?

Ответ. а) при $(a)>\sqrt{2}$ - 0 штук, б) при $(a)=\sqrt{2}$ - 2 штуки, в) при $1<(a)<\sqrt{2}$ - 4 штуки, г) при $(a)=1$ - 3 штуки, д) при $(a)<1$ - 6 штук..

Решение. Воспользуемся графическим методом. Первое уравнение системы задаёт на координатной плоскости две прямые $x=\pm y$ - биссектрисы координатных углов. Второе уравнение системы задаёт окружность единичного радиуса с центром $O(a,0)$ на оси абсцисс. Число решений зависит от количества точек пересечения и касания этих двух прямых и окружности. Несложно найти, что их будет:

а) при $(a)>\sqrt{2}$ - 0 штук, б) при $(a)=\sqrt{2}$ - 2 штуки, в) при $1<(a)<\sqrt{2}\vee¿$ - 4 штуки, г) при $(a)=1$ - 3 штуки, д) при $(a)<1$ - 6 штук.

11.3. Доказать, что для всех действительных x выполнено неравенство $x^4+3x^2+2x+2>0$ **.**

Решение. Достаточно заметить, что: $x^4+3x^2+2x+2=\left(x^2+1\right)^2+(x+1)^2>0$.

11.4. Внутри прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 см расположены две окружности, отношение радиусов которых равно 9 к 4. Окружности касаются друг друга внешним образом, обе касаются гипотенузы, одна – одного катета, другая – другого. Найти радиусы окружностей.

Ответ. $\frac{20}{47}$ см и $\frac{45}{47}$ см.

Решение. Пусть радиусы окружностей равны $4x$ и $9x$ соответственно и касаются катетов они так, как показано на рисунке 2. Выразим через x расстояние y между точками касания окружностей с гипотенузой треугольника (см рис.1).

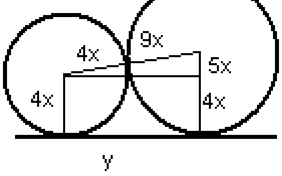

Рисунок 1

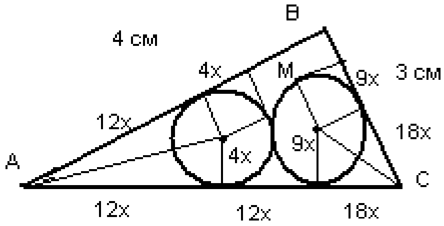

Рисунок 2 5 см

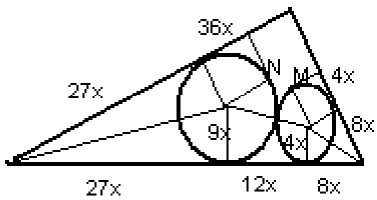

Рисунок 3

По теореме Пифагора, $(9x+4x)^2=(9x-4x)^2+y^2$, откуда $y=12x$. По формуле тангенса двойного угла найдём тангенсы половин углов А и С: $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{3}, \tan\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{2}$, выразим через x длину гипотенузы АС: $AC=42x$. Следовательно, $x=\frac{5}{42}$. Но в таком случае, правая окружность выйдет за край треугольника, поскольку проекция точки М на сторону ВС отстоит от С на $\frac{5\cdot27}{42}=\frac{135}{42}>3$ см. Этот вариант расположения окружностей нам не подходит. Аналогичное рассмотрение второго варианта, когда окружности меняются местами (см. рисунок 3), даёт $x=\frac{5}{47}$ см. Поскольку $\frac{5\cdot36}{47}=180\cdot47<4$ и $\frac{5\cdot12}{47}=60\cdot47<3$, то окружности в этом случае не выходят за пределы треугольника.

11.5. Найти количество различных расстановок в ряд всех натуральных чисел от 1 до 10 таких, что сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 3.

Ответ. $4!\cdot2\cdot3!\cdot3!=1728$.

Решение. Из условия следует, что остатки от деления на 3 чисел, стоящих через 2, равны. Следовательно, равные остатки от деления на 3 имеют числа, стоящие на 1,4,7 и 10 местах, а также стоящие на 2, 5 и 8 местах, и на 3,6 и 9 местах. Среди чисел от 1 до 10 четыре одинаковых остатка 1 дают только 1,4,7 и 10, следовательно, на местах 1,4,7,10 стоит любая перестановка этих чисел, всего 4! вариантов. Аналогично, на местах 2,5,8 стоит любая расстановка чисел 2,5,8, либо чисел 3,6 и 9, а на местах 3,6,9 — наоборот. Всего получаем 4!3!3!2 вариантов.