Решения задач Заключительного этапа

Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г.г. по математике

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Какие две цифры нужно дописать справа к числу 2013, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найти все возможные варианты ответа.

Ответ. 94, полученное число будет равно 201394.

Решение. Остаток от деления числа $\overline{2013xy}$ на 101 равен $\overline{xy}+7$ и это должно делиться на 101. Это больше 0, но меньше 202, поэтому $\overline{xy}+7=101, \overline{xy}=94, x=9, y=4$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Необоснование $\overline{xy}+7=101$ - минус балл.

10.2. Решить уравнение: $\sqrt[3]{20-x}-\sqrt[3]{13-x}=\sqrt[3]{7}$.

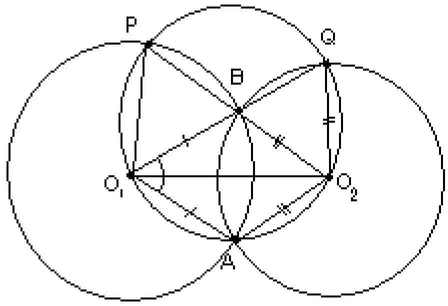
Ответ. 20 и 13.

Решение. Если всё тупо возвести в куб и привести подобные, получим $\sqrt[3]{20-x}\sqrt[3]{13-x}(\sqrt[3]{20-x}-\sqrt[3]{13-x})=0$. Скобка не равна 0, поэтому либо $x=20$, либо $x=13$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Потеря решения – минус 3 балла.

10.3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в двух точках *A* и *B.* Пусть *P* и *Q* - точки пересечения окружности, описанной вокруг треугольника

O_1AO_2 с первой и второй окружностями соответственно. Доказать, что отрезки O_1Q и O_2P пересекаются в точке B.



Решение. Нам достаточно доказать, что точка B принадлежит отрезкам O_1Q и O_2P. Треугольники O_2O_1B и O_2O_1A равны по трём сторонам, поэтому $\angle O_2O_1B = \angle O_2O_1A$. С другой стороны, отрезки O_2A и O_2Q равны, как радиусы, поэтому $\angle O_2O_1A = \angle O_2O_1Q$, как опирающиеся на одинаковые дуги в окружности, описанной около треугольника O_2O_1A. Следовательно, $\angle O_2O_1B = \angle O_2O_1A = \angle O_2O_1Q$, поэтому точки O_1, B и Q лежат на одной прямой. Аналогично доказывается, что точки O_2, B и P тоже лежат на одной прямой.

10.4. В клетках доски 8 на 8 расставлены фишки так, что для каждой фишки горизонталь либо вертикаль доски, в которых она лежит, содержит всего одну фишку. Каково максимально возможное количество фишек на доске?

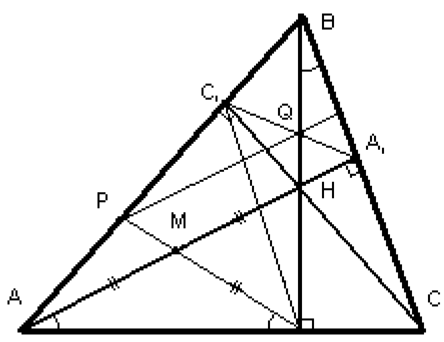
Ответ. 14.

Решение. Сопоставим каждой фишке ту горизонталь либо вертикаль доски, в которой она единственна. Если она единственна в них обеих, сопоставим горизонталь. Из условия следует, что разным фишкам сопоставлены разные горизонтали и вертикали. Если не все горизонтали и не все вертикали сопоставлены, то их общее число не превосходит 14, в каждой из них не более одной фишки, всего фишек не более 14. Если же сопоставлены, скажем, все горизонтали, то в каждой горизонтали стоит по фишке – всего 8.

Пример расстановки 14 фишек: заполнены все клетки левой вертикали и нижней горизонтали, кроме левой нижней угловой клетки.

Оценивание. Оценка 5 баллов. Пример 2 балла. Любая неверная оценка с любыми рассуждениями – 0 баллов.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями высот, опущенных из вершин A, B, C соответственно, а H — точка пересечения высот. Точка M — середина AH, Q — точка пересечения отрезков BH и A_1C_1, а P - точка пересечения прямой B_1M и стороны AB. Доказать, что прямая PQ перпендикулярна стороне BC.



Решение. Достаточно показать, что PQ параллельна AA_1. Последнее равносильно тому, что $AP : PC_1 = A_1Q : QC_1$. Хорошо известен факт подобия между собой треугольников $ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$, то есть исходного и трёх, каждый из которых образован соответствующей вершиной исходного и двумя основаниями высот. Подобие, например ABC и BC_1A_1, короче всего может быть доказано с помощь отношений: $A_1B : AB = \cos\angle B = C_1B : CB$ соответствующих сторон при общем угле B. Из данных подобий вытекает подобие треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1, при котором соответствующими являются вершины A и A_1, B и B_1. Далее

заметим, что из равенства углов
$\angle AB_1P = \angle MB_1A = \angle MAB_1 = 90 - \angle C = \angle A_1BB_1 = \angle A_1BQ$ вытекает, что точки P и Q тоже являются соответствующими при данном подобии. Отсюда сразу следует требуемое отношение $AP : PC_1 = A_1Q : QC_1$.

Оценивание. Доказано подобие треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1 : 2 балла. Замечено равенство $\angle AB_1P = \angle A_1BQ$: 1 балл.

.