Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^3}{y^4}$, где x и y - некоторые натуральные числа?

Ответ. Любое натуральное число.

Решение. Пусть n - произвольное натуральное число. Положим $x = n^3$, $y = n^2$, тогда $\frac{x^3}{y^4} = \frac{n^9}{n^8} = n$.

10.2. В треугольнике *ABC* величина угла *A* равна 30 градусов, а длина медианы, проведённой из вершины *B*, равна длине высоты, проведённой из вершины *C*. Найти величины углов *B* и *C*.

Ответ. $\angle B = 90^\circ, \angle C = 60^\circ$.

Решение. Ввиду того, что $\angle A = 30^\circ$, высота, проведённая из вершины *C,* равна половине *AC* , следовательно, медиана, проведённая из вершины *B*, равна половине *AC.* Отсюда сразу вытекает, что вершина *B* лежит на окружности с диаметром *AC,* следовательно, $\angle B = 90^\circ, \angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

10.3. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 99, все цифры которого чётны.

Ответ. 228 888.

Решение. Обозначим сумму цифр искомого числа *X*, стоящих на местах с чётными номерами (разряды десятков, тысяч и т.д) за *A*, а сумму цифр, стоящих на местах с нечётными номерами (разряды единиц, сотен и т.д) - за *B* . По признакам делимости на 9 и 11, *A*+*B* делится на 9, а *A*-*B* делится на 11. Ввиду чётности цифр числа, *A* и *B* чётны, *A*+*B* также делится на 18, а *A*-*B* делится на 22. Если $A - B = 0$, то *A* и *B* равны и делятся на 9, с учётом их чётности А и В делятся на 18. Отсюда легко заметить, что в этом случае искомое число не меньше 228888, причём цифры числа 228888 чётны и оно делится на 9. Отсюда следует, что, если есть такое число, меньшее 228888, то для него $A \le 18, B \le 24$. Значит, если A-B не равно 0, то $A - B = -22$, и либо $A = 0, B = 22$, либо $A = 2, B = 24$. В обоих случаях $A + B$ не делится на 9. Следовательно, X=228888.

10.4. В четырёх клетках квадрата 5 на 5 записаны 4 числа, как показано на рисунке. Расставить в свободных клетках квадрата ещё двадцать одно число так, чтобы пять чисел каждой строки и пять чисел каждого столбца были последовательными членами соответствующих арифметических прогрессий.

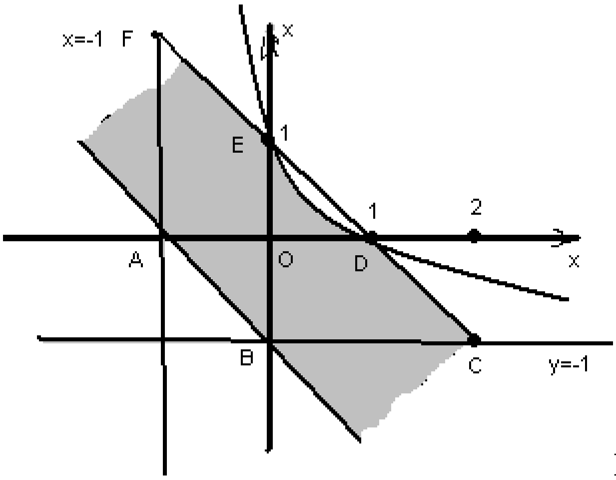
	74			
				166
		103		
0				

Ответ. Приведён на рисунке.

Решение. Назовём число, стоящее в i – ом столбце и j – ой строке (i,j) – ым числом, i и j изменяются от 1 до 5. Воспользуемся тем, что в арифметической прогрессии полусумма i-1 – ого и i+1 – ого членов равна i – ому. Пусть (3,3)-е число равно x, по условию задачи, (3,4)-ое число равно $2x - 103$, (1,4)-число равно $251 - 2x$, (1,3)-е число равно $\frac{2}{3}(251 - 2x)$. И наконец, (3,3) - е число равно, с одной стороны, x, а с другой, $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(251 - 2x) + 166\right) = \frac{1}{3}(251 - 2x) + 83$, откуда $x = 100$.

10.5. Действительные числа x и y удовлетворяют неравенствам $|x + y| \le 1$, $|xy + x + y| \le 1$. Найти максимальное значение x.

Ответ. Максимальное $x = 2$.



Решение. Воспользуемся графическим методом. Первое неравенство ограничивает полосу ширины два между прямыми $y = -x - 1$ и $y = -x + 1$. Второе перепишем в виде $0 \le (x+1)(y+1) \le 2$. Решением этого неравенства является объединение множества точек, лежащих выше прямой $y = -1$ и правее прямой $x = -1$ и ниже гиперболы $(x+1)(y+1) = 2$, а также множества точек, лежащих ниже прямой $y=-1$ и левее прямой $x=-1$. Вторая часть целиком лежит ниже полосы – решения неравенства $|x+y|\le 1$. Гипербола $(x+1)(y+1)=2$ проходит через точки (1,0) и (0,1). Несложно показать, что решением исходной системы неравенств является шестиугольник, отмеченный на рисунке как *ABCDEF*. Максимальную абсциссу имеет точка С.