

Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике

Заключительный этап

8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Пусть положительные числа a и b таковы, что $(a+b)^2 = a^2 + 10b$. Докажите, что $2a^2 + 10b = 10a + b^2 + ab$.

8.2. К некоторому раствору соли добавили 1 килограмм 20%-ого раствора той же соли, получив 16%-ый раствор. Если вместо этого добавить 2 килограмма 9%-ого раствора, то получится 10%-ый раствор. Какова масса и концентрация исходного раствора?

8.3. Пусть угол между продолжениями сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равен 90° градусов, а длина отрезка PQ , соединяющего середины сторон AD и BC , равна половине разности этих сторон. Докажите, что $ABCD$ - трапеция.

8.4. В клетках квадратной доски 8 на 8 расставлены крестики так, что каждый квадрат 2 на 2 клетки содержит ровно 2 крестика. Доказать, что в четырёх угловых клетках доски тоже записаны ровно 2 крестика.

8.5. Какой максимальный остаток может давать трёхзначное число при делении на свою сумму цифр?

8.6. В каждой из 8 кучек различное число камней. Известно, что каждую из кучек можно полностью разложить по остальным так, что число камней во всех них станет равным. Каким может быть минимальное число камней в самой большой кучке?