

**Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике**  
**Заключительный этап**

**11 класс**

*Время выполнения задания 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**11.1.** Когда сумма возрастов Васи и брата его Пети будет вдвое больше, чем сейчас, Вася будет в 3,5 раза старше, чем Петя тогда, когда Васе было столько лет, сколько Пете сейчас. А вот через 4 года Вася будет в 1,5 раза старше, чем Петя сейчас. Сколько сейчас лет каждому из братьев? Возраст каждого из них во все указанные в условии моменты времени считать целым числом лет.

**11.2.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , длины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  которой равны 3 см, 7 см, 5 см и 13 см соответственно. Обозначим через  $P$  точку пересечения биссектрис углов  $BAD$  и  $ABC$ , а через  $Q$  - точку пересечения биссектрис углов  $ADC$  и  $BCD$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

**11.3.** Доказать, что  $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$ .

**11.4.** Найти все значения  $c$ , при которых для любых  $a > b > 0$  выполнено неравенство:  
 $a + \sqrt{b+c} > b + \sqrt{a+c}$ .

**11.5.** Функция  $f(x)$  определена для всех действительных чисел  $x$ , принимает действительные значения и удовлетворяет тождеству  $f(x+f(y))=2x+4y+3$  для всех  $x$  и  $y$ . Найти все такие функции  $f(x)$ .

**11.6.** В некоторой стране 20 городов, некоторые из которых напрямую связаны авиалиниями с двусторонним движением. Кроме того, если выбрать любые 11 городов этой страны, то для любой пары выбранных городов из одного из них можно (при необходимости, с пересадками) проехать в другой, используя только авиалинии между выбранными городами. Найти минимально возможное число авиалиний в этой стране.