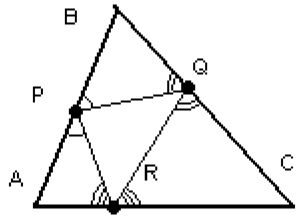
Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике
Заключительный этап
10 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. В классе 29 учеников, на праздник каждый послал одноклассникам: некоторые по 4 открытки, а остальные - по 6 открыток. Мог ли в итоге каждый ученик получить по 5 открыток?

10.2. Найти все решения уравнения: $x^7+2x^5+3x^3+4x=10$.



10.3. Найти все пары чисел x и y, для которых выполнено неравенство: $\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\le x+y$.

10.4. На сторонах AB,BC и AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P,Q и R соответственно так, что $\angle APR=\angle BPQ, \angle BQP=\angle CQR, \angle CRQ=\angle ARP$. Доказать, что P,Q и R - основания высот треугольника ABC.

10.5. Найдите все натуральные числа n, для которых существует набор из n различных натуральных чисел такой, что сумма любых трёх чисел из него является простым числом.

10.6. Квадратная клеточная доска 10 на 10 клеток произвольным образом разбита по линиям сетки на 50 домино размера 1 на 2 клетки. Из левого нижнего угла в правый верхний по линиям сетки проведена ломаная из 20 звеньев, первое из которых горизонтально, второе – вертикально, третье – снова горизонтально, четвёртое – вертикально и так далее чередуясь, двадцатое звено – вертикально. Какое количество домино, в зависимости от разбиения, может пересекать эта ломаная? Считается, что ломаная пересекает домино, если она проходит по общей стороне двух клеток этого домино, то – есть делит его на две клетки.