

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.
Время выполнения 4 астрономических часа Каждая задача оценивается 7 баллами
9 класс

1. Назовём *перегородкой* произвольную сторону некоторого единичного квадрата на клетчатом листе бумаги. Можно ли отметить в квадрате 7 на 7 клеток несколько непересекающихся перегородок так, чтобы проекции всех отмеченных перегородок на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата полностью их покрывали? Перегородки не пересекаются, если не имеют общих точек (концов). Отмеченные перегородки могут располагаться как внутри квадрата 7 на 7, так и на его границе.
2. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного – за 17 минут. Петя сначала открыл горячий кран. Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налил в полтора раза больше, чем холодной?
3. Найти все решения системы уравнений: $x + y = 4, (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280$.
4. Пусть $ABCD$ - параллелограмм, вписанная в треугольник ABD окружность касается сторон AB и AD соответственно в точках M и N , вписанная в треугольник ACD окружность касается сторон AD и DC соответственно в точках P и Q . Доказать, что прямые MN и PQ перпендикулярны.
5. При каких натуральных n доску размера n на n клеток можно разбить по линиям сетки на домино размера 1 на 2 клетки так, чтобы вертикальных и горизонтальных домино было поровну?
6. Среди всех натуральных чисел от 1 до 20 включительно некоторые 10 чисел окрасили в синий цвет, а остальные 10 – в красный, затем подсчитали все возможные суммы пар чисел, одного из которых синее, а другое - красное. Какое максимальное количество различных может быть среди ста полученных чисел?