Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.

Время выполнения 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается 7 баллами*

11 класс

1. В лесу собрали 36 грибов - рыжиков, груздей и подберёзовиков. Известно, что среди любых 25 из этих грибов не меньше 5 груздей, среди любых 27 – не меньше 2 рыжиков, а среди любых 31 гриба не меньше 4 подберёзовиков. Найти число грибов каждого вида.

2. В трапеции углы при большем основании равны 20 и 70 градусов, длина средней линии равна 18 см, а отрезка, соединяющего середины оснований - 6 см. Найти длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах.

3. Найти множество точек M первой четверти координатной плоскости таких, что через M можно провести прямую, отсекающую от первой четверти треугольник единичной площади.

4. Через некоторую точку плоскости проходят четыре различные прямые l, m, n и p, они обозначены по часовой стрелке. Известно, что угол между l и m равен углу между n и p. Из произвольной точки A плоскости, не принадлежащей этим прямым, на прямые l, m, n и p опустили перпендикуляры AL, AM, AN и AP соответственно. Доказать, что прямые LP и MN параллельны.

5. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и для всех действительных чисел x выполнено равенство $f(f(x)) = 5x + 4$. Найти $f(-1)$.

6. В десятиэлементном множестве произвольным образом отмечены несколько подмножеств, сумма количеств элементов во всех них равна 31. Доказать, что одно из этих подмножеств обязательно содержится в объединении остальных. (Не путать сумму количеств элементов во всех множествах и количество элементов в их объединении).