Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.

Время выполнения 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается 7 баллами*

10 класс

1. Назовём *перегородкой* произвольную сторону некоторого единичного квадратика на клетчатом листе бумаги. Можно ли отметить в квадрате 7 на 7 клеток несколько непересекающихся перегородок так, чтобы проекции всех отмеченных перегородок на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата полностью их покрывали? Перегородки не пересекаются, если не имеют общих точек (концов).

2. Известно, что 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съели бы траву на лугу за 96 дней? Помните, что трава на лугу всё время подрастает с постоянной скоростью.

3. Пусть числа x и y удовлетворяют соотношению $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$. Найти минимум значения выражения $x^2 + y^2$.

4. В клетках квадрата 6 на 6 записаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до 36 включительно, по одному в клетке. Доказать, что всегда найдутся 4 клетки, образующие квадрат 2 на 2, сумма чисел в которых является чётным числом. Построить пример такой расстановки, чтобы только в одном изо всех квадратов 2 на 2 сумма чисел была чётной.

5. В окружности проведены хорды *AB* и *AC*, биссектриса угла *BAC* пересекает окружность в точке *D*, точка *E* - основание перпендикуляра из *D* на прямую *AB*. Доказать, что длина *AE* равна полусумме длин *AB* и *AC*.

6. Найти максимально возможное количество подмножеств одиннадцатититиэлементного множества таких, что все они содержат разное число элементов и ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных.