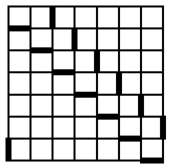
Решения задач
заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике
2009/2010 г.г.

Общие принципы оценивания. Полное решение каждой задачи оценивается 7 баллами. При наличии неполного решения исходим из степени продвижения. Частные случаи и соображения оцениваются от 0 до 1 балла. Явно высказанная в тексте идея решения, которая может быть доведена до конца, оценивается от 2 до 3 баллов. Более или менее верное решение с существенными недочётами, типа упущения какого – то случая. оценивается от 4 до 5 баллов. Верное и полное решение с мелкими недочётами типа арифметических ошибок, оценивается 6 баллами. Верное и полное решение без каких – либо ошибок оценивается 7 баллами.
После каждой задачи приведены некоторые критерии её оценивания.

9 класс

9.1. Ответ. Можно, например так, как показано на рисунке справа.



Имеется множество других способов, в том числе когда все отмеченные перегородки лежат внутри квадрата, достаточно привести любой из них.
Замечания по оцениванию. Любой правильный ответ оценивается в 7 баллов. Если в ответе проекции перегородок не закрываю всего один отрезок на одной из сторон, оцениваем в 1 балл. Остальное 0 баллов.

9.2. Ответ. Через 7 минут.

За одну минуту горячий кран заполняет $\frac{1}{23}$ часть ванны, а холодный $\frac{1}{17}$ часть. После наполнения ванны горячая вода должна составлять $\frac{3}{5}$ ванны, а холодная $\frac{2}{5}$ ванны. Следовательно, горячий кран должен быть открыт $\frac{3}{5}\Big/\frac{1}{23}=\frac{69}{5}$ минуты, а холодный $\frac{2}{5}\Big/\frac{1}{17}=\frac{34}{5}$ минуты. Значит, холодный кран должен быть открыт через $\frac{69}{5}-\frac{34}{5}=7$ минут, после открытия горячего.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и аккуратно проверена его правильность, ставим 3 балла. Правильно составлено уравнение или система, но решено с ошибками, ставим от 4 до 6 баллов в зависимости от типа ошибки.

9.3. Ответ. $(3,1)$ и $(1,3)$.

Из условия $x+y=4$ - не равно 0, поэтому во втором уравнении можно сократить $x+y=4$, получив $(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)=70$. Далее, возводя первое уравнение в квадрат, получим $x^2+y^2=16-2xy$. Подставим во второе, получим $3(xy)^2-40xy+93=0$, откуда $xy=3$ или $xy=\frac{31}{3}$. Вместе с первым уравнением получаем систему для x,y. В первом случае $x=3, y=1$ или $x=1, y=3$, во втором решений нет.
Замечания по оцениванию. Если угаданы оба ответа и проведена проверка – даётся 1 балл. При наличии верного решения с приобретением каких – либо посторонних корней снимается 3 балла. При потере в процессе одного решения снимается 3 балла.

9.4. По свойству касательных, проведённых из одной точки, треугольники AMN и DPQ являются равнобедренными, поэтому прямые MN и PQ перпендикулярны биссектрисам

углов BAD и ADC соответственно. Обозначим точку пересечения этих биссектрис за S. Сумма величин смежных углов BAD и ADC параллелограмма равна 180 градусов, поэтому сумма углов SAD и SDA равна 90 градусов, следовательно, угол ASD тоже равен 90 градусов, то – есть биссектрисы SA и SD углов BAD и ADC перпендикулярны. Значит, прямая MN параллельна SD, а PQ параллельна SA, поэтому они тоже перпендикулярны.
Замечания по оцениванию. Решение в каком – либо частном случае, скажем, для прямоугольника, оценивается в 1 балл.

9.5. Ответ. Тогда и только тогда, когда n делится на 4.
Если n делится на 4, требуемое разбиение почти очевидно. Например, делим доску на две равных половины по вертикали, левую разбиваем на горизонтальные домино, а правую - на вертикальные. Все размеры обеих половин делятся на 2, поэтому такое разбиение возможно. Пусть n не делится на 4. Если оно нечетно, то вообще нельзя разрезать на домино 1x2. Если же $n = 4k + 2$, то горизонтальных и вертикальных домино должно быть по $\frac{n^2}{2} = 8k^2 + 8k + 2 = 4m + 2$ штук. Покрасим на горизонталях доски с нечётными номерами все клетки в чёрный цвет, а на горизонталях с чётными номерами – в белый, получив некое подобие полосатого матраса. Тогда каждое вертикальное домино будет содержать ровно одну чёрную клетку, то есть покроет $\frac{4m+2}{2} = 2m + 1$ – нечётное число клеток, а каждое горизонтальное домино – две или ноль чёрных клеток, то – есть чётное число. Общее число чёрных клеток на доске равно $\frac{n^2}{2} = 8k^2 + 8k + 2 = 4m + 2$ – чётному числу, и каждая из них содержится в некотором домино. Все горизонтальные домино в сумме содержат чётное число чёрных клеток, значит, и все вертикальные домино должны в сумме содержать чётное число чёрных клеток. Это возможно только в случае, когда общее число вертикальных домино чётно – противоречие.
Замечания по оцениванию. Верно доказано, что разрезание возможно, только когда n делится на 4 – оцениваем 5 баллами. Приведён пример такого разрезания, когда n делится на 4 – оцениваем 2 баллами.

9.6. Ответ. Максимум 35 различных чисел.
Сумма синего и красного чисел может быть натуральным числом от 1+2=3 до 19+20=39 включительно, поэтому различных не может быть больше 37. Более того, заметим, что одно из чисел 3,4,..,13 обязательно не является суммой синего и красного чисел. В противном случае, пусть число 1 синее, тогда 3 можно представить только как 1+2, поэтому 2 – красное. Число 4 представляется только как 1+3, поэтому 3 тоже красное. Далее, 5=1+4=2+3, но 2 и 3 красные, поэтому годится только первое представление, следовательно 4 тоже красное, и т. д, получаем, что все 11 чисел 2,3,..,12 – красные, а это невозможно. Аналогично показываем, что, если все числа 29,30,..,39 являются суммами синего и красного чисел, то 11 чисел 9,..,19 одного цвета. Таким образом, различных чисел может быть не более 37-2=35 штук. Один из возможных примеров, когда их ровно 35, таков: 1,11,12,..,19 – синие, 2,3,..,10,20 – красные.
Замечания по оцениванию. Только верный ответ – 0 баллов. Верный ответ и пример, когда он достигается – 3 балла. Верное доказательство максимальности числа 35 оцениваем 4 баллами. Попытки решения, где доказываются другие оценки, отличные от 35, оцениваем в 0 баллов.