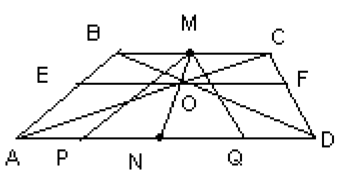
Решения задач
заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике
2009/2010 г.г.
11 класс

11.1. Ответ. 16 груздей, 11 рыжиков, 9 подберёзовиков**.**
Из того что среди любых 25 из этих грибов не меньше 5 груздей, следует, что количество рыжиков и подберёзовиков вместе не превосходит 20, значит, груздей не меньше 16. Аналогично, из того, что среди любых 27 – не меньше 2 рыжиков, следует, что груздей и подберёзовиков вместе не больше 25, а рыжиков – не меньше 11. Наконец, из того, что среди любых 31 гриба не меньше 4 подберёзовиков, следует, что груздей и рыжиков вместе не больше 27, а подберёзовиков – не меньше 9. Ввиду того, что 16+11+9=36 – общему числу грибов, получим везде точное равенство.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и аккуратно проверена его правильность, ставим 3 балла. Правильно составлено уравнение или система, но решено с ошибками, ставим от 4 до 6 баллов в зависимости от типа ошибки.

11.2. Ответ. 16 см**.**

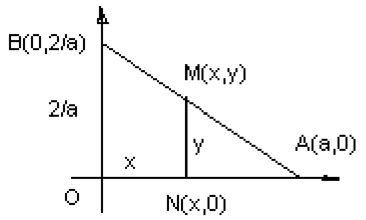


Обозначим вершины трапеции за *ABCD*, середины оснований за *M* и *N*, отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах за *EF*. Проведём через *M* отрезки *MP* и *MQ* параллельно боковым сторонам трапеции, из условия получим, что треугольник *PMQ* – прямоугольный с медианой *MN* и гипотенузой *PQ*, равной разности *AD* и *BC*. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, длина *MN* равна половине *PQ*, следовательно, полуразность оснований трапеции равна 6 см. Учитывая, что полусумма оснований равна средней линии, то – есть 18 см, находим длины оснований:

AD=24, BC=12. Из подобия треугольников *AOD* и *BOC* получаем *AO:OC=2:1*, поэтому длины отрезков *EO* и *OF* равны $\frac{2}{3}BC = 8$ см, следовательно, длина *EF* равна 16 см.

Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Верно найдены основания трапеции – оцениваем 3 баллами. Возможные ссылки на готовую формулу вычисления *EF* по *AD* и *BC* без доказательства её оценивать в 1 балл.

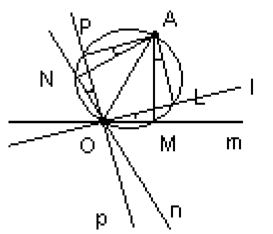
11.3. Ответ. Все точки первой четверти координатной плоскости, лежащие не выше гиперболы $y = \frac{1}{2x}$.



Пусть *M* – произвольная искомая точка, проведём через неё отрезок *AB* с концами на координатных осях такой, что площадь треугольника *AOB* равна 1, а длина *OA* равна a. Опустим из М перпендикуляр *MN* на ось *OX*. Из подобия треугольников *AOB* и *AMN* следует: $\frac{a-x}{y} = \frac{a}{2/a}$, откуда $ya^2 - 2a + 2x = 0$. Таким образом, *M* удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда последнее квадратное уравнение относительно a имеет положительное решение. Ввиду положительности первого и отрицательности второго коэффициентов достаточно неотрицательности дискриминанта, равного $4 - 8xy$. Таким образом, необходимым и достаточным условием возможности проведения через точку *M* требуемого в условии отрезка *AB* является соотношение $xy \le \frac{1}{2}$.

Замечания по оцениванию. Возможно другое верное решение, когда оценивается, возможно, через производную, максимальное значение *y,* как функции от *a* при заданном *x.* Если высказана идея, вроде подобия в приведённом решении и по нему составлено похожее уравнение, но не понято, что с ним правильно делать, оцениваем в 3 балла. При решении уравнения необходимо чётко указывать в тексте на необходимость и достаточность найденного условия. При отсутствии обоснования достаточности снимаем 2 балла.

11.4. Обозначим через *O* точку пересечения прямых *l,m,n,p*. Легко заметить, что точки *L,M,N,P* лежат на окружности с диаметром *AO*. Пусть *A* лежит между *p* и *l*. Стороны углов *LAM* и *LOM* соответственно перпендикулярны, поэтому сами углы равны. Аналогично, равны углы *PAN* и *PON*. По условию, углы *LOM* и *PON* равны, как углы между прямыми *l* и *m*, и между *n* и *p*. Следовательно, дуги *LM* и *PN* окружности равны, значит, *PL* и *MN* параллельны. Аналогично рассматривается случай, когда *A* лежит между *m* и *l*.



Замечания по оцениванию. Если замечены отдельные верные факты, оцениваем следующим образом. Проведена окружность с диаметром *AO*, оцениваем в 1 балл. Если замечено равенство углов *LAM* и *LOM,* оцениваем в 1 балл. Если замечено равенство углов *LAM* и *PAN,* оцениваем в 1 балл. Замечено равенство дуг *LM* и *PN* - оцениваем в 1 балл. В ходе решения должны рассматриваться два разных варианта расположения *A* относительно прямых, внутри угла между *l* и *m* или *n* и *p*, либо внутри оставшихся углов. Если это не делается, или не объясняется, как этого избежать, снимаем 1 балл.

11.5. Ответ. *f(-1)=-1.*

Рассмотрим выражение *f(f(f(x))).* С одной стороны, оно равно *f(5x+4),* с другой - равно *5f(x)+4*. Заметим, что при *x=-1* имеем *5x+4=x,* следовательно *5f(-1)+4=f(-1),* откуда *f(-1)= =-1.*

Замечания по оцениванию. Просто угадан верный ответ – 0 балл. Задача решена в предположении, что *f(x)* – многочлен – даётся 1 балл.

11.6. Предположим противное, что существуют несколько подмножеств десятиэлементного множества, таких, что ни одно из них не содержится в объединении остальных, и сумма количеств элементов во всех этих подмножествах равна 31. Обозначим количество подмножеств, удовлетворяющих этому условию, за n. Ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных, поэтому каждое множество содержит некоторый элемент, лежащий только в нём. Все эти элементы различны и их n штук. Кроме них, остаётся ещё $10-n$ элементов, содержащих оставшиеся элементы всех найденных подмножеств. Следовательно, все вместе эти множества содержат не более $n(10-n)+n=11n-n^2$ элементов. Максимум этого выражения достигается при $n=5$ и $n=6$ и равен 30 – противоречие.
Замечания по оцениванию. Последнее предложение должно быть доказано, иначе снимаем 1 балл.