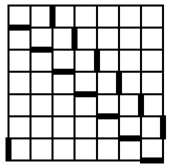
Решения задач
заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике
2009/2010 г.г.
10 класс

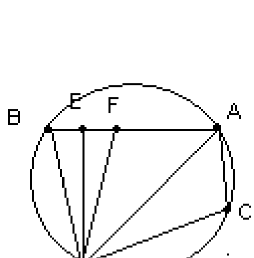


10.1. Ответ. Можно, например, так, как показано на рисунке справа. Имеется множество других способов, достаточно привести любой из них. **Замечания по оцениванию.** Любой правильный ответ оценивается в 7 баллов. Если в ответе проекции перегородок не закрываю всего один отрезок на одной из сторон, оцениваем в 1 балл. Остальное 0 баллов.

10.2. Ответ. 20 коров**.**
Обозначим начальный объём травы на лугу за 1, прирост травы в день – за x, количество травы, съедаемой в день одной коровой – за y. Из условия получаем систему уравнений: $1+24x=24\cdot 70y, 1+60x=60\cdot 30y$. Решая её, находим: $x=\frac{1}{480}, y=\frac{1}{1600}$. Обозначим искомое число коров за n, получим ещё одно уравнение: $1+96\cdot\frac{1}{480}=96n\cdot\frac{1}{1600}$, откуда $n=20$.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и аккуратно проверена его правильность, ставим 3 балла. Правильно составлено уравнение или система, но решено с ошибками, ставим от 4 до 6 баллов в зависимости от типа ошибки. Неверно понято условие, скажем, не учтён прирост травы, ставим 0 баллов.

10.3. Ответ. $\frac{1}{2}$.
Преобразуем уравнение к виду: $(x+3)^2=(y-2)^2$, получим $(x+3-y+2)(x+3+y-2)=0=(x-y+5)(x+y+1)$. Следовательно, множеством точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют исходному уравнению, является объединение прямых $y=x+5$ и $y=-x-1$. Выражение x^2+y^2 является квадратом расстояния от начала координат до точки (x,y), поэтому от нас требуется найти минимум квадрата расстояния от начала координат до точек этих прямых. Легко убедиться, что это квадрат длины перпендикуляра ко второй прямой, равный $\frac{1}{2}$ при $x=y=-\frac{1}{2}$.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и указана точка, где он достигается, ставим 1 балл. В решении последний этап – подсчёт расстояния - должен быть аккуратно проведён, иначе снимаем 2 балла.

10.4. Разобьём квадрат 10 на 10 на 25 квадратов 2 на 2. Сумма всех записанных чисел, равная 5050, является суммой 25 чисел, каждое из которых равно сумме чисел в одном из этих квадратов 2 на 2. Сумма 25 нечётных чисел не может быть чётной, поэтому сумма чисел в одном из квадратов 2 на 2 чётна.



10.5. Биссектриса AD угла BAC делит дугу BC на равные части, поэтому $BD=DC$. Отметим на луче AB точку F так, что $AF=AC$, тогда треугольники ADC и ADF равны по двум сторонам и углу, следовательно, $DF=DC$. Значит, треугольник BDF равнобедренный, и его высота DE делит основание BF пополам.

Отсюда $AE = \frac{1}{2}(AF + AB) = \frac{1}{2}(AC + AB)$, что и требовалось доказать.

Замечания по оцениванию. Если замечены некоторые верные факты, типа равенства $BD = DC$, или предприняты какие – то попытки, типа отмечена точка F и всё, можно поставить 1 балл. Заметим, что в приведённом способе решения было неважно, лежит ли точка F на отрезке AB или нет. Нужно смотреть за тем, существенно ли в решении школьника расположение F, при необходимости снимать 1 балл за нерассмотрение всех случаев.

10.6. Ответ. 6.

Обозначим количество множеств, удовлетворяющих условию, за n. Ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных, поэтому каждое множество содержит некоторый элемент, лежащий только в нём. Все эти элементы различны и их n штук. Кроме них, остаётся ещё $11-n$ элементов, среди которых содержатся оставшиеся элементы самого большого подмножества. По условию, мощность самого большого подмножества не меньше n, следовательно, $11-n \geq n-1$, откуда $n \leq 6$. Приведём пример системы из шести подмножеств, удовлетворяющих условию задачи. Пусть всё множество состоит из чисел от 1 до 11, тогда первое подмножество содержит 1, второе 2 и 7, третье 3, 7,8, четвёртое 4,7,8,9, пятое 5,7,8,9,10, шестое 6,7,8,…,11.

Замечания по оцениванию. Только верный ответ – 1 балл. Ответ и пример, когда он достигается – 3 балла. Верное доказательство максимальности числа 6 - 4 балла. Попытки решения с другим ответом оценивается в 0 баллов.