XXIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2022

6 февраля

---

9 класс

---

1. В далеком будущем часть человечества переселилась на планету, сила тяжести на полюсе которой была в точности такой же, как и на полюсе Земли, но сама планета при этом была заметно крупнее: длина ее экватора равнялась 60 тысячам километров. Чтобы не скучать по земной Луне, переселенцы решили поместить на орбиту вокруг планеты малую планету из местного пояса астероидов. Какого размера должна быть эта малая планета и на каком расстоянии от центра основной планеты поселения ее нужно поместить, чтобы и период обращения, и видимые размеры получившегося спутника были такими же, как у земной Луны?

Решение (8 баллов):

Ускорение свободного падения можно выразить через радиус и массу планеты, тогда мы можем получить значение массы планеты:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{gR^2}{G}\,.$$

Нам будет удобно выразить массу планеты в массах Земли, поэтому подставим выражение для g через параметры Земли:

$$M = M_\oplus \cdot \frac{R^2}{R_\oplus^2} = \frac{9}{4} M_\oplus\,.$$

Определим расстояние, на котором нужно поместить малую планету, для этого запишем третий закон Кеплера для системы «Земля — Луна» и для системы «планета — малая планета», с учетом $T_☾ = T$:

$$\frac{T_☾^2}{a_☾^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}\,, \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,.$$

$$a = a_☾ \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{M_\oplus}} \approx 1.3 a_☾ = 5 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

Для объектов с небольшими угловыми размерами угловой диаметр обратно пропорционален расстоянию до объекта. Значит, объект должен быть в 1.3 раза крупнее Луны и размерами будет близок к Меркурию.

2. Школьник Вася прочитал в энциклопедии о строении планеты в далекой звездной системе. 30% по радиусу занимает ядро, затем до 70% радиуса простирается внутренний слой с плотностью 3000 кг/м^3, а дальше находится внешний слой со средней плотностью всего 600 кг/м^3. Из-за кляксы на странице энциклопедии Вася не смог разобрать плотность ядра, но рассчитать ее он смог: в энциклопедии говорилось, что средняя плотность всей планеты равна 1530 кг/м^3. Чему же равна плотность ядра планеты?

Решение (8 баллов):

Запишем выражение для массы планеты. Пусть R — радиус планеты, ρ_1, ρ_2, ρ_3 — плотности слоев от ядра к краю, тогда следует сложить массу ядра и массы слоев, объемы которых можно вычислить как разности объемов шаров:

$$M = \frac{4}{3}\pi(0.3R)^3\rho_1 + \frac{4}{3}\pi\left((0.7R)^3 - (0.3R)^3\right)\rho_2 + \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (0.7R)^3\right)\rho_3\,.$$

С другой стороны, массу можно выразить через полный объем и среднюю плотность:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\bar{\rho}.$$

После приравнивания выражений и сокращения, получим равенство

$$\bar{\rho} = 0.3^3\rho_1 + \left(0.7^3 - 0.3^3\right)\rho_2 + (1 - 0.7^3)\rho_3\,.$$

В этом уравнении нам известны все величины, кроме ρ_1:

$$1530 = 2.7 \cdot 10^{-2}\rho_1 + 0.316 \cdot 3000 + 0.657 \cdot 600.$$

$$\rho_1 = 6960\,\text{кг}/\text{м}^3.$$

3. В одном из эпизодов сериала «Ведьмак» упоминается «Проклятие Чёрного Солнца», под действие которого попали девушки, родившиеся во время полного солнечного затмения. Оцените, сколько людей на Земле могло бы попасть под действие аналогичного «проклятия» за одно затмение. Считайте, что проклятие «работает», пока полное солнечное затмение наблюдается хотя бы в одной точке на Земле. Известно, что за год на Земле рождается около 160 миллионов детей.

Решение (8 баллов):

Расстояние от Солнца до системы «Земля—Луна» достаточно велико, и мы можем считать, что в течение затмения Луна освещается параллельным пучком солнечных лучей. Максимально возможное время затмения достигается, когда тень Луны проходит по диаметру Земли. За это время Луна проходит по орбите дугу l относительно линии «Земля—Солнце», причем хорда, стягивающая эту дугу, равна диаметру Земли. Таким образом

$$l = 2\arcsin\frac{R_\oplus}{a_{☾}} = 2\arcsin\frac{6370}{384 \cdot 10^3} \approx 1.9^\circ$$

Так как относительно линии «Земля—Солнце» Луна движется с синодическим периодом, равным 29.5 суток, дугу l она пройдет за время

$$t = \frac{1.9^\circ}{360^\circ} \cdot 29.5\ \text{сут.} \approx 3.7\ \text{часов.}$$

Дополнительно можно учесть размер лунной тени, который на поверхности Земли может достигать 270 км. В таком случае $t \approx 3.8$ часов.

Более грубая оценка, состоящая в делении диаметра Земли на орбитальную скорость Луны (то есть без учета движения Земли вокруг Солнца), окажется немного заниженной — около 3.5 часов.

Стоит отметить, что вращение Земли вокруг своей оси никак не влияет на общую продолжительность затмения на Земле (в отличие от продолжительности затмения в конкретной точке).

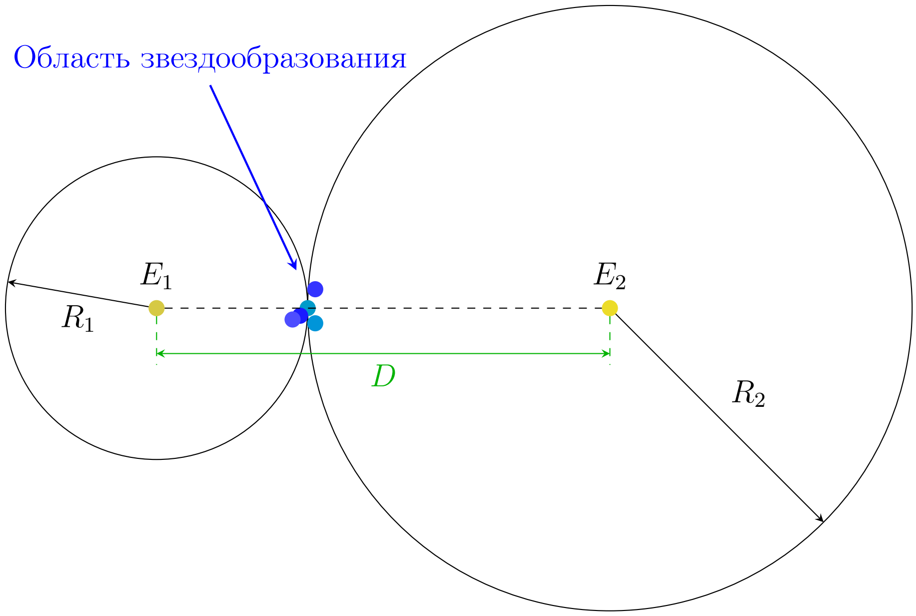
За время t на Земле родится

$$\frac{3.8\ \text{часов}}{1\ \text{год}} \cdot 157 \cdot 10^6 \approx 68\ \text{тыс. детей.}$$

4. Известно, что фронт ударной волны, образовавшейся в результате вспышки Сверхновой в однородной газовой среде, имеет сферическую форму с радиусом R, который зависит от времени t как $R(t) \propto E^{1/5}t^{2/5}$, где E — энергия взрыва (знак $\propto$ означает пропорциональность). Пусть две Сверхновые, находящиеся на расстоянии 300 пк друг от друга, вспыхнули одновременно, причем одна из них была в 32 раза более мощной, чем другая. На каком расстоянии от более мощной Сверхновой фронты встретятся?

Решение (8 баллов):

Известно, что области звездообразования локализуются там, где происходит заметное повышение плотности среды. Это может быть вызвано как флуктуациями плотности в ГМО, так и следствием вспышек Сверхновых. Действительно, ударная волна, распространяясь по газу повышает плотность перед своим фронтом. В месте, где две ударные волны «сталкиваются» друг с другом можно ожидать достаточно сильного повышения плотности газа и, соответственно, вспышки звездообразования. Поэтому место встречи фронтов в подобной ситуации можно непосредственно наблюдать.



Пусть $D = 300$ пк — расстояние между Сверхновыми, а R_1 и R_2 — радиусы сферических волн в момент их соприкосновения t, образовавшихся от взрывов. Пусть E_1 и E_2 — энергия взрывов этих Сверхновых соответственно, и, для определенности, $E_2 = 32E_1$. Тогда:

$$D = R_1 + R_2 = \kappa E_1^{1/5}t^{2/5} + \kappa E_2^{1/5}t^{2/5} \qquad \Rightarrow \qquad t^{2/5} = \frac{D}{\kappa(E_1^{1/5} + E_2^{1/5})}$$

Здесь введен коэффициент пропорциональности κ, который будет считаться одинаковым для обеих Сверхновых. Получаем:

$$R_1 = \kappa E_1^{1/5}t^{2/5} = \frac{\kappa E_1^{1/5}D}{\kappa(E_1^{1/5} + E_2^{1/5})} = \frac{E_1^{1/5}D}{E_1^{1/5} + E_2^{1/5}} = \frac{E_1^{1/5}D}{E_1^{1/5} + (32E_1)^{1/5}} = \frac{D}{1 + \sqrt[5]{32}} = \frac{D}{3},$$

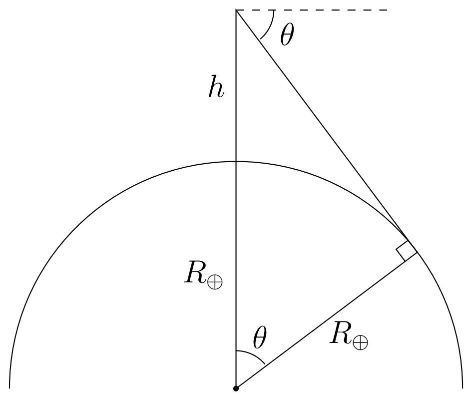
а отсюда $R_2 = \frac{2}{3}D$. Таким образом, встречу фронтов и вспышку звездообразования следует ожидать на отрезке, соединяющем обе Сверхновые, на расстоянии 200 пк от более мощной Сверхновой.

5. В самом высоком здании мира — небоскребе «Бурдж-Халифа» в Дубае — на высоте 442 м расположен самый высотный ресторан мира. Поскольку это мусульманская страна, в ресторане тщательно соблюдается запрет принимать пищу между восходом и заходом Солнца во время месяца Рамадан. Оцените максимально возможную разницу между продолжительностью дневного поста на уровне моря и в ресторане в «Бурдж-Халифе», если известно, что Дубай расположен на 25° северной широты.

Решение (8 баллов):

Из-за того, что мусульманский календарь — чисто лунный (и продолжительность года меньше продолжительности года в григорианском календаре на 11 суток), месяц Рамадан может попасть на любой календарный сезон года. Поэтому начнем с решения более частной задачи: выясним, каким будет ответ в дни равноденствий.

Определим понижение горизонта θ при наблюдении с высоты $h = 442$ м, зная радиус Земли $R_\oplus \approx 6400$ км.



Можно заметить, что понижение горизонта совпадает с центральным углом на рисунке, поэтому $\cos\theta = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$. Преобразуем правую часть равенства

$$\cos\theta = \frac{R_\oplus + h}{R_\oplus + h} - \frac{h}{R_\oplus + h} \approx 1 - \frac{h}{R_\oplus}$$

и, зная, что для малого угла $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, запишем

$$\theta = \sqrt{\frac{2h}{R_\oplus}},$$

угол θ при этом будет выражен в радианах. Подставив числа, получим $\theta \approx 1/80$ радиана, т.е. примерно $0^\circ.7$.

Далее учтем, что дело происходит на широте 25°, поэтому суточная параллель Солнца не перпендикулярна горизонту и составляет с ним угол $90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. Если по высоте Солнцу надо преодолеть расстояние $0^\circ.7$, то по суточной параллели $0^\circ.7/\sin 65^\circ$. Оценим $\sin 65^\circ \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.9$, тогда расстояние по суточной параллели оказывается равным $0^\circ.8$. Осталось не забыть, что эффект надо учесть два раза — для заката и для восхода Солнца — поэтому нам надо выяснить, за какое время Солнце проходит по суточной параллели $1^\circ.6$. Вспомнив стандартное соотношение единиц дуги и времени ($1^\circ = 4^m$), получаем, что разница составляет 6 минут.

Теперь давайте задумаемся, следует ли нам еще что-нибудь учитывать. Протяженность диска Солнца несущественна: все те же рассуждения можно проводить для верхнего края диска. Учет рефракции не нужен, да и затруднен: с одной стороны, можно считать, что рефракция примерно постоянна (и тогда на *разности* моментов восхода/захода Солнца на уровне моря и в ресторане на башне она не скажется), с другой — достаточно точная модель «подгоризонтной» рефракции в указанных условиях заведомо выходит за рамки наших возможностей при решении задачи во время тура. Однако полезно вспомнить, что пригоризонтная рефракция весьма существенно зависит от давления и температуры воздуха (и может достигать величин более градуса), что означает, что полученную нами оценку бессмысленно улучшать. В частности, поскольку дело происходит в приэкваториальной зоне, нет смысла рассматривать различные сезоны года, на результат это обстоятельство повлияет слабее, чем возможное изменение температуры воздуха (и соответствующее изменение рефракции) при восходе/заходе Солнца.