XXIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2022

6 февраля

11 класс

1. На экваторе и на полюсе планеты, имеющей форму шара, установлены два одинаковых математических маятника. Период колебаний маятника на экваторе на 2% больше, чем на полюсе. Если же маятник на полюсе поднять на высоту 130 км, то периоды колебаний маятников станут равными. Планета совершает оборот вокруг своей оси за 10 земных часов. С какой максимальной скоростью можно двигаться по поверхности такой планеты без использования двигателей?

Решение (8 баллов):

Из условий следует, что при подъеме маятника на 130 км период колебаний увеличивается на 2%:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g(R)}}\cdot 1.02 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(R+h)}}\,.$$

Тогда $1.02^2 g(R+h) = g(R)$. Запишем выражение для ускорения силы тяготения:

$$1.02^2\cdot\frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} \quad\Rightarrow\quad h = 0.02R.$$

Отсюда мы получаем величину радиуса планеты: 6500 км.

Период колебаний на экваторе будет меньше, чем на полюсе, поскольку частично ускорение силы тяготения компенсируется ускорением от центробежной силы: $\tilde{g} = g - \omega^2 R = \frac{4}{3}\pi G\rho R - \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения планеты. Из условий следует

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g(R)}}\cdot 1.02 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\tilde{g}(R)}} \quad\Rightarrow\quad 1.02^2\cdot\left(\frac{4}{3}\pi G\rho - \omega^2\right)R = \frac{4}{3}\pi G\rho R.$$

Отсюда мы получим плотность планеты:

$$(1.02^2-1)\cdot\frac{4}{3}\pi G\rho = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad\Rightarrow\quad \rho = \frac{3\pi}{GT^2\cdot(1.02^2-1)} = 2.7\cdot 10^3\,\text{кг/м}^3.$$

Скорость движения по поверхности не должна превышать первую космическую скорость; рассчитаем ее значение:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}\cdot R = 5.6\,\text{км/с}.$$

2. На небе наблюдаются две двойных звезды, компоненты которых разрешимы в оптическом диапазоне. Известно, что из четырех звезд, образующих эти системы, две являются карликами, две — гигантами, две — красного цвета, две — голубого, при этом светимости двух гигантов совпадают, двух карликов — также совпадают. Определите, какая из звезд с какой входит в состав одной системы. Какая из двух этих систем старше?

Решение (8 баллов):

Начнем с простого случая, когда среди звезд есть две пары полностью одинаковых. Тогда, если это голубые гиганты и красные карлики, то возможна любая комбинация звезд в системах, причем о возрасте этих систем ничего определенного сказать нельзя (он вполне может оказаться и одинаковым). Аналогичной будет ситуация с двумя голубыми карликами и двумя красными гигантами — «эволюционный статус» системы из карликов более поздний, но они исходно могли быть более массивными, поэтому более старой может оказаться любая система.

Куда интереснее случай, когда все звезды разные. Для удобства обозначим их ГГ («голубой гигант»), КК («красный карлик»), ГК (название единообразия ради, фактически это горячий белый карлик) и КГ, и подумаем, какие пары могут входить в состав одной двойной звезды, учитывая, что возраст компонент одной двойной системы должен быть одинаков. Также заметим, что системы достаточно широкие — компоненты можно наблюдать отдельно — а это означает, что в системах не происходил обмен масс между компонентами.

Пара ГГ+ГК невозможна: в таком случае компонент, ставший карликом, должен был бы проэволюционировать быстрее соседа, поэтому его начальная масса должна была бы быть больше, чем у массивной звезды главной последовательности, а это означает, что он в результате эволюции не смог бы стать белым карликом — это конечная стадия эволюции сравнительно маломассивных звезд.

Пара ГГ+КГ также невозможна: звезда, ставшая красным гигантом, должна была быть массивнее соседа (поскольку проэволюционировала быстрее), но в этом случае она и на стадии красного гиганта оказалась бы ярче соседа (светимость красных гигантов всегда либо примерно равна светимости на стадии главной последовательности — для массивных звезд, либо больше — для маломассивных), а это противоречит условию.

Следовательно, остается только один вариант разбивки звезд на пары: ГГ+КК и ГК+КГ. Первая система должна быть достаточно молодой (в ее состав входит голубой гигант — массивная звезда, не успевшая покинуть главную последовательность), вторая существенно старше — красный гигант в ней имеет ту же светимость, что и голубой гигант в первой, а это значит, что это менее массивная звезда, успевшая добраться до стадии красного гиганта.

3. Оцените минимальное расстояние, начиная с которого у галактик не будет наблюдаться фиолетовое смещение линий в спектре.

Решение (8 баллов):

Несложно догадаться, что для выполнения условия надо, чтобы скорость, соответствующая космологическому расширению (определяемая из закона Хаббла), оказалась заведомо больше, чем случайные (т.н. пекулярные) скорости галактик. Поэтому нам надо оценить характерную величину пекулярных скоростей.

Начнем с оценки ширины линий в спектрах галактик. Известно, что галактики вращаются с характерными скоростями до $\lesssim 5 \cdot 10^2$ км/с, соответственно, несколько сотен км/с — это точность, с которой оценка скорости движения галактики имеет смысл. Далее можно двигаться многими различными путями. Один из возможных вариантов: вспомнить, что галактики входят в состав скоплений и оценить характерную скорость движения галактик, например, в нашем собственном сверхскоплении Девы). Его масса составляет порядка $\mathfrak{M} = 10^{15}\ \mathfrak{M}_\odot$, радиус около $R = 20$ Мпк, и характерную скорость можно легко оценить как

$$v \sim \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}}{R}},$$

причем оценка сильно упростится, если использовать звездноастрономическую систему единиц (массы Солнца, астрономические единицы, годы). Получаем

$$v \sim \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10^{15}}{2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^5}} \approx 10^2.$$

1 а.е./год примерно равна 5 км/с, так что характерные скорости движения галактик оказываются около $5 \cdot 10^2$ км/с. Примерно ту же оценку можно просто вспомнить, если известны характерные скорости движения Галактики относительно реликтового фона, центра Местной Группы и т.п.

Удваивая характерную пекулярную скорость (нас интересует относительная скорость нашей и какой-то другой галактики, а наша Галактика тоже может иметь пекулярную скорость) и учитывая ширину линии, скажем, что скорость космологического расширения должна составлять около $2 \cdot 10^3$ км/с. Осталось вспомнить закон Хаббла $v = H \cdot r$ и величину постоянной Хаббла $H \approx 70$ км/с/Мпк. Получаемое характерное расстояние оказывается порядка 30 Мпк. Что интересно, догадаться до ответа можно было и сразу, осознав, что это расстояние должно быть примерно таким же, как максимальный размер сверхскопления галактик.

4. При наблюдении двойной системы, один из компонентов которой — белый карлик, обнаружено, что линия H_α расходится с полуамплитудой 0.46 ангстрем. При этом, в полосе V фиксируются падения блеска с периодом 0.5 лет. В каких пределах может быть заключена масса звезды-компаньона белого карлика? Луч зрения находится в орбитальной плоскости системы, орбиты круговые.

Решение (8 баллов):

Задачу проще всего решать в системе единиц «а.е.–годы–массы Солнца», в которой скорость света равна $6.3 \cdot 10^5$ а.е./год.

Линия H_α должна наблюдаться от оптического компонента системы, то есть не от белого карлика (подобная линия у белого карлика принципиально возможна, но она будет заведомо более слабой). Воспользовавшись формулой эффекта Допплера, вычислим скорость звезды-компаньона, она окажется равной 4.4 а.е./год.

Далее свяжем эту скорость с параметрами системы. Будем обозначать величины, относящиеся к оптической звезде, индексом 1, а к белому карлику — индексом 2. Пусть расстояние между звёздами равно r. Так как известно, что орбиты круговые, то

$$m_1 \frac{V_1^2}{r_1} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}.$$

При этом $m_1 r_1 = m_2 r_2$ и $r_1 + r_2 = r$. Тогда: $V_1^2 = \frac{G m_2^2}{(m_1+m_2) r}$.

Запишем также третий закон Кеплера (сразу в принятой нами системе единиц): $T^2 = \frac{r^3}{(m_1+m_2)}$. Тогда

$$r = \sqrt[3]{T^2 (m_1 + m_2)}$$

Следовательно

$$V_1^2 = \frac{G}{T^{2/3}} \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^{4/3}}$$

$$\frac{m_2}{(m_1+m_2)^{2/3}} = \frac{V_1 T^{1/3}}{\sqrt{G}} = \frac{V_1 T^{1/3}}{2\pi} = \frac{4.4 \cdot 0.5^{1/3}}{2\pi} = 0.56 = K$$

Получим отсюда выражение для массы m_1, выразив её через m_2: $m_1 = -m_2 + \left(\frac{m_2}{K}\right)^{3/2}$. Для поиска экстремума возьмём производную этого выражения: $\frac{dm_1}{dm_2} = -1 + \frac{3}{2K^{3/2}} m_2^{1/2}$. Приравняв её к нулю, найдём экстремум: $m_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 K^3$. Заметим, что $K < 1$, так что это выражение заведомо меньше единицы и близко к нулю.

Во-вторых, экстремум является точкой минимума. Действительно, в этой точке производная меняет знак с отрицательного на положительный. Однако, требуется найти максимально возможную массу звезды. На первый взгляд кажется, что ответ в таком случае бесконечность, однако, вспомним, что у белых карликов существует предел сверху на массу, известный как предел Чандрасекара: $\approx 1.4M_\odot$. Подставим это в выражение для массы m_1, получим: $m_1 = 2.5M_\odot$.

Для нахождения минимально возможной массы возьмём примерную нижнюю границу массы белых карликов, наблюдаемых на данный момент, то есть $m_2 = 0.5M_\odot$. Тогда нижняя граница массы составляет $m_1 = 0.34M_\odot$

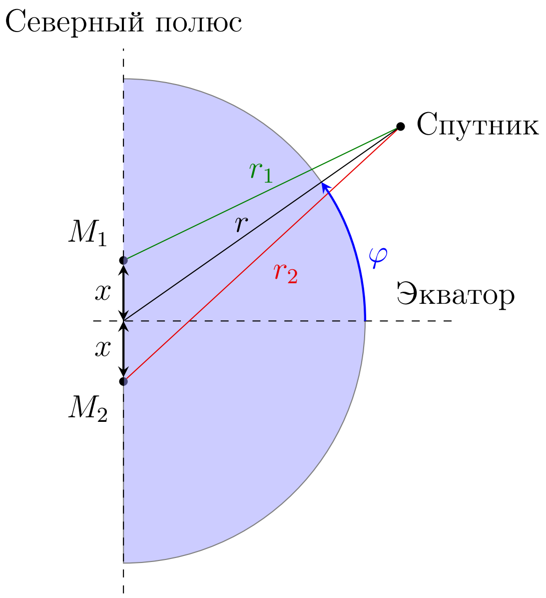
5. В 1961 году при расчете траектории орбитальных спутников советские инженеры моделировали потенциал сплюснутой Земли при помощи двух негравитирующих масс (каждая равна половине массы Земли), находящихся на некотором расстоянии друг от друга вдоль оси вращения Земли. Современная модель потенциала Земли в **третьем** приближении описывается формулой $V(r,\varphi) = \frac{GM_\oplus}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right]$, где r — расстояние от центра Земли до данной точки, φ — широта, G — гравитационная постоянная, $M_\oplus$ и $R_\oplus$ — масса и радиус Земли, $J_2 \approx 1.08\times10^{-3}$ — коэффициент. Определите расстояние между этими двумя массами.

Решение (8 баллов):

Посвящается памяти К.В.Холшевникова

Из данной в условии формулы потенциала (он симметричен относительно экватора) и равенства негравитирующих масс ($M_1 = M_2 = M = M_\oplus/2$) понятно, что можно считать, что каждая из них отстоит на одинаковом расстоянии x от центра Земли, т.е. искомое расстояние есть $2x$. Пусть расстояние от первой массы до спутника составляет r_1, от второй — r_2. Из схемы ниже ясно, что можно применить теорему косинусов для связи этих расстояний с r:

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2xr\sin\varphi + x^2}, \qquad r_2 = \sqrt{r^2 + 2xr\sin\varphi + x^2}$$



Тогда потенциал «честным образом» расписывается так:

$$V(r,\varphi) = \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} = \frac{GM}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x}{r}\sin\varphi + \left(\frac{x}{r}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x}{r}\sin\varphi + \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\right]$$

Первое «естественное желание», которое возникает при виде этого выражения — отбросить члены порядка $(x/r)^2$ и воспользоваться формулой приближенных вычислений

$(1+z)^\alpha \approx 1+\alpha z$, верной при $|z| \ll 1$. Заметим, однако, что это тупиковый путь: во-первых, тогда в квадратных скобках останутся лишь члены порядка x/r, да и они взаимно уничтожат друг друга, а во-вторых, это будет лишь **второе** приближение (отсюда напрямую следует, что во втором приближении Земля также является шаром). Более конструктивный путь — не отбрасывать члены порядка $(x/r)^2$, тогда вроде как остается то, что нужно, но... в таком случае, мы не все члены порядка $(x/r)^2$ учтем, да и слагаемого с синусом не заработаем, поэтому также потерпим фиаско.

Из вышенаписанного следует, что нам необходимо взять следующий член разложения приближенной формулы (фактически — разложить функцию обратного корня в ряд Тейлора около нуля):

$$(1+z)^\alpha \approx 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+...$$

Из этого разложения видно, что слагаемые с синусом дадут третий порядок малости с учетом r вне скобок, что и будет **третьим** приближением. Получается такое выражение для потенциала:

$$V(r,\varphi) \approx \frac{GM}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2x\sin\varphi}{r}+\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(-\frac{2x\sin\varphi}{r}+\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)^2+\right.$$
$$\left.+1-\frac{1}{2}\left(\frac{2x\sin\varphi}{r}+\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(\frac{2x\sin\varphi}{r}+\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)^2\right] \approx$$

...аккуратно раскрываем все круглые скобки, приводим подобные, отбрасываем в квадратных скобках слагаемые порядка не менее $(x/r)^3$...

$$\approx \frac{GM}{r}\left[2+\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(3\sin^2\varphi-1\right)\right]=$$

...теперь перейдем к массе Земли, вынеся двойку из квадратных скобок, а также домножим и поделим второе слагаемое на $R_\oplus^2$...

$$=\frac{GM_\oplus}{r}\left[1+\left(\frac{x}{R_\oplus}\right)^2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}\right]=\frac{GM_\oplus}{r}\left[1-J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}\right]$$

Здесь синим цветом записано выражение, данное в условии задачи. Заметим, что по итогу наших выкладок мы пришли почти к такой же формуле, но с одним нюансом: из равенства выше напрямую следует, что

$$\left(\frac{x}{R_\oplus}\right)^2=-J_2 \qquad \Rightarrow \qquad x=R_\oplus\sqrt{-J_2}\approx i\cdot 6400\cdot 0.033=210i \text{ км},$$

где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица, то есть искомое расстояние $2x=420i$ км. Этот факт кажется весьма парадоксальным, ведь расстояние не может быть мнимым. Однако, заметим, что мы решали чисто математическую задачу: рассматривалось три тела (две половинки Земли и спутник), два из которых не взаимодействовали между собой, поэтому и результат тоже оказался чисто математическим, однако, с большим практическим смыслом.

Вышеприведенное решение является полным, т.к. показывает, что именно такое расположение двух масс позволяет описать потенциал для всех r и φ. Однако, требуемый ответ можно получить несколько проще, рассмотрев один из частных случаев: рассчитав потенциал по обеим моделям на полюсе Земли или на экваторе.

Используя вышеприведенные обозначения при расчете потенциала для точки на полюсе Земли ($r=R_\oplus, \varphi=90°$) получаем:

$$\frac{r}{r^2-x^2}=\frac{1}{r}\left[1-J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\right] \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{R_\oplus}=\sqrt{1-\frac{1}{1-J_2}}\approx\sqrt{-J_2}.$$

А для спутника, обращающегося по экватору ($r = R_\oplus, \varphi = 0°$) это будет выглядеть так:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{J_2}{2}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\right] \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{R_\oplus} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + J_2/2)^2}} \approx \sqrt{-J_2}.$$

Строго говоря, такое решение не будет гарантировать совпадение потенциала на всех широтах и расстояниях, хотя и даст верный результат.

Аналитически описывать движение спутника вокруг сплюснутой Земли в учетом небольшой поправки, данной в условии сильно сложнее, чем решать задачу с двумя невзаимодействующими притягивающими центрами (это сделали еще Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж и Карл Якоби). Однако сейчас расчет потенциала производится численно с учетом слагаемых не менее 2000 порядка. Эти слагаемые берутся из разложения потенциала Земли в ряд Лапласа при помощи многочленов Лежандра. Собственно, в условии дан многочлен Лежандра порядка 2.

Более изящное решение данной задачи (через образующую функцию многочленов Лежандра), а также дополнительные интересные подробности приведены в § 23 книги «Реальные применения мнимых чисел», М.Б. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин, «Радяньска школа», 1988.