XXIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

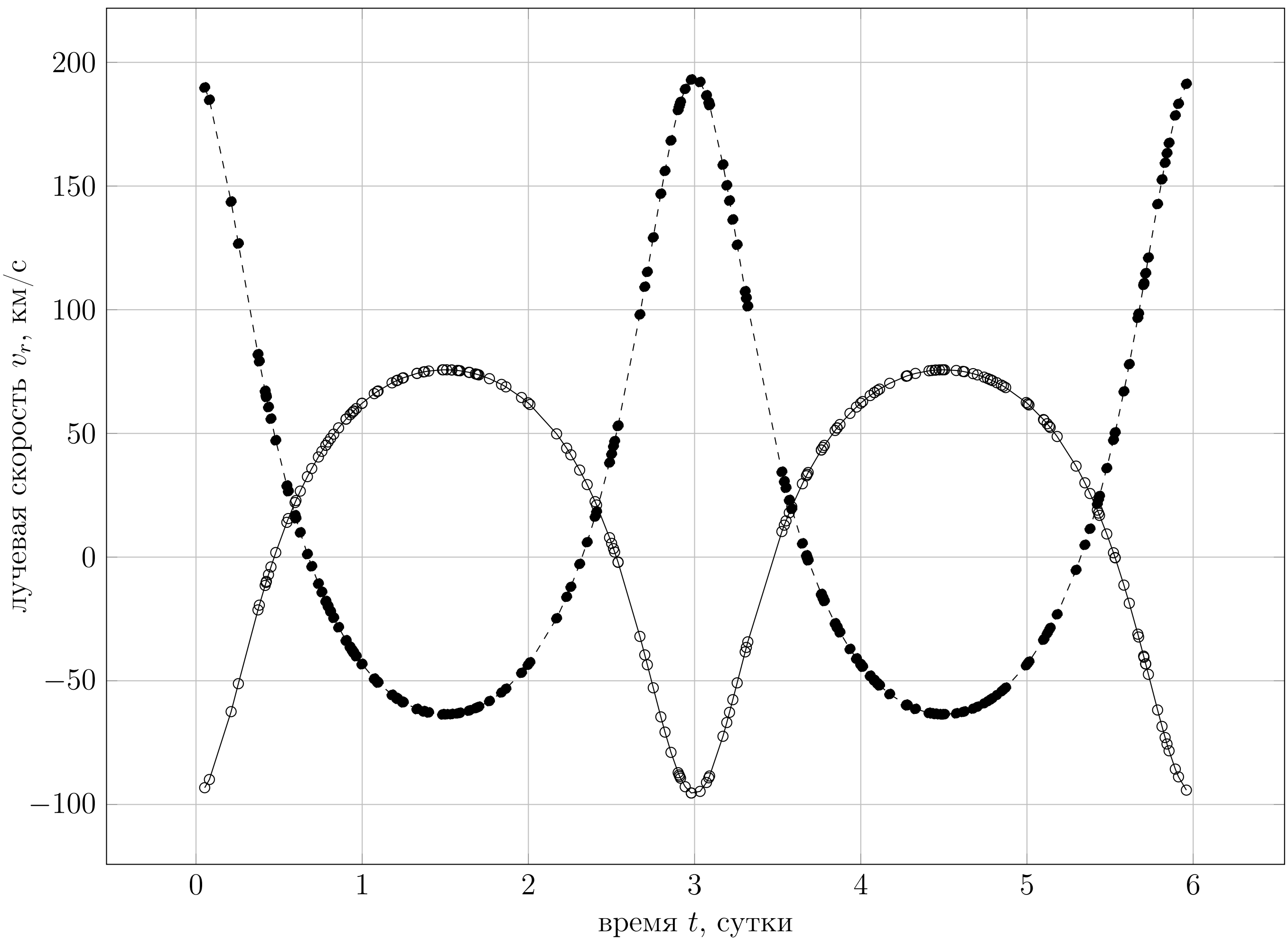
практический тур, решения

2022

13 марта

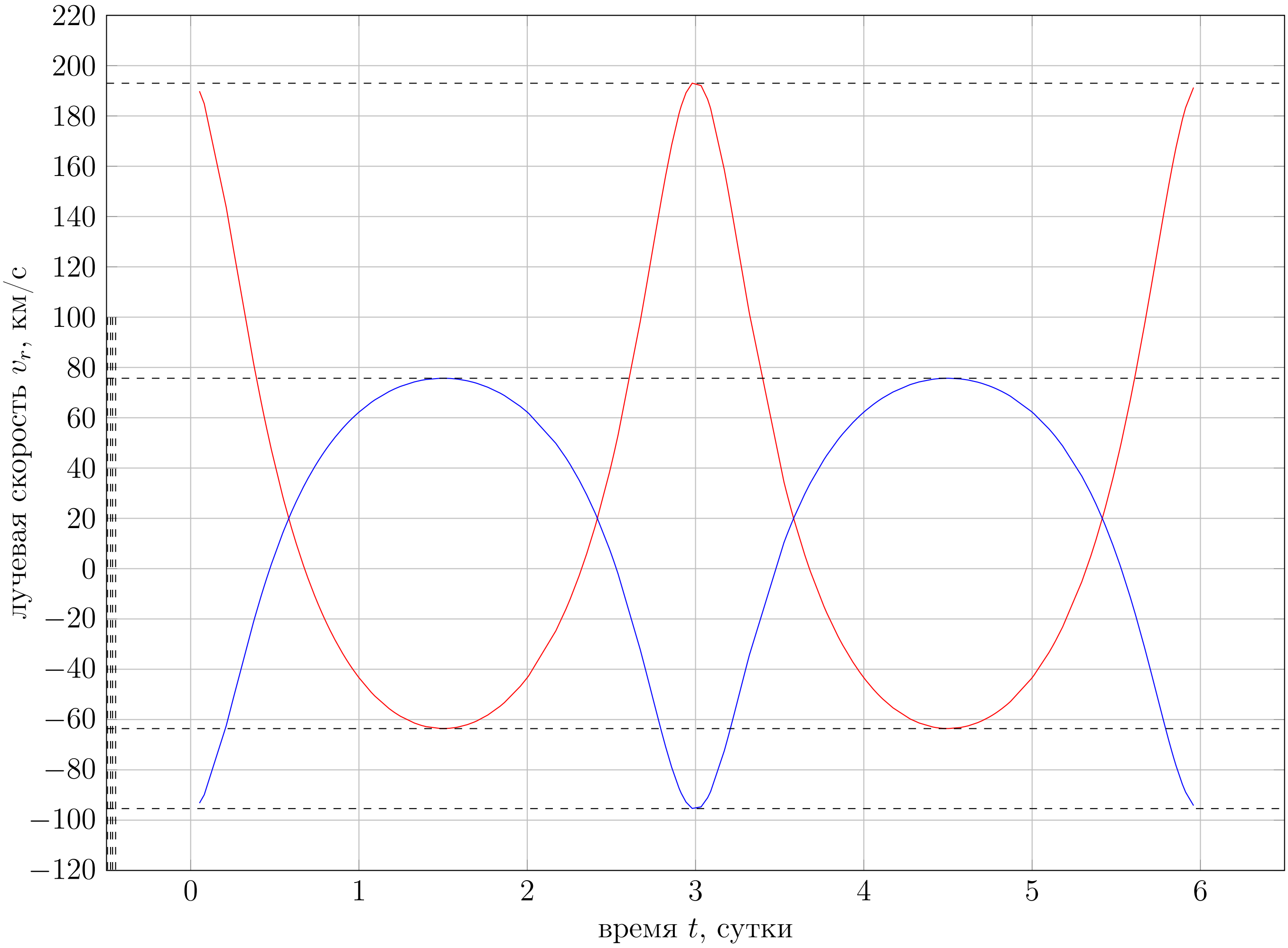
11 класс

Вам дана кривая лучевых скоростей двойной системы, состоящей из двух звезд Главной последовательности. Луч зрения лежит в плоскости орбиты, линия апсид (соединяющая периастры и апоастры орбит) перпендикулярна лучу зрения. Найдите параметры системы: массы звезд, период и большую полуось системы, эксцентриситет орбиты. Определите видимые звездные величины системы в максимуме и минимумах блеска. Годичный параллакс системы равен $\pi = 0''.05$, звезды считайте сферически симметричными, эффектами прогрева и потемнения диска к краю можно пренебречь.

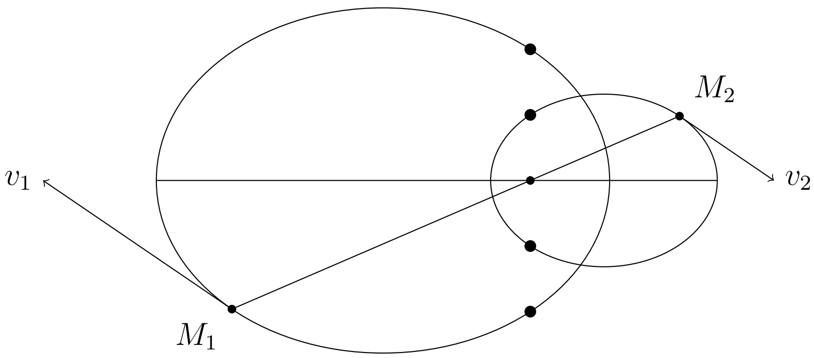


Решение (20 баллов):

Найдем по графику период системы, он равен $T = 3$ суток. Первое, что следует заметить — то, что ордината точек пересечения кривых лучевых скоростей не равна нулю. Это означает, что центр масс системы движется с ненулевой скоростью относительно наблюдателя. Проведем прямую через точки пересечения кривых для первого и второго компонента и найдем эту скорость, она окажется равной $v_0 = 20$ км/с.



Также видно, что кривые звезд не симметричны относительно прямой $v_r = 20$ км/с, то есть минимальная и максимальная скорости не равны по модулю. Это значит, что орбита эллиптическая. Вид орбиты сверху:



Найдем эксцентриситет орбиты. В условии сказано, что линия апсид перпендикулярна лучу зрения, соответственно, максимумы и минимумы лучевых скоростей достигаются в перицентрах и апоцентрах орбиты. Запишем их значения:

$$v_{1max} = 193 \text{ км/с}, \ v_{2max} = 76 \text{ км/с}$$

$$v_{1min} = -64 \text{ км/с}, \ v_{2min} = -95 \text{ км/с}$$

Теперь исправим эти скорости за движение центра масс (сдвинем весь график на $\Delta v_r = 20$ км/с вниз) и найдем таким образом скорости в точках апсид:

$$v_{1p} = 173 \text{ км/с}, \ v_{2p} = 115 \text{ км/с}$$

$$v_{1a} = 84 \text{ км/с}, \ v_{2a} = 56 \text{ км/с}$$

Запишем отношение скоростей в апоцентре и перицентре:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} \approx 2.06,$$

отсюда получаем эксцентриситет орбиты $e = 0.35$.

Получим выражения для скоростей звезд на орбитах. Запишем правило рычага

$$\mathfrak{M}_1 r_1 = \mathfrak{M}_2 r_2,$$

а также заметим, что

$$r_1 + r_2 = r.$$

Из двух предыдущих равенств следует

$$r_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} r, \;\; r_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} r$$

Исходя из этого, скорости звезд могут быть записаны следующим образом:

$$v_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} v, \;\; v_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} v,$$

где v — относительная скорость, которая выражается из интеграла энергии

$$v = \sqrt{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Поэтому

$$v_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\sqrt{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{G\frac{\mathfrak{M}_2^2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$v_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\sqrt{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{G\frac{\mathfrak{M}_1^2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

r и a в этих формулах - относительные расстояние и полуось орбиты. Отношение скоростей равно обратному отношению масс:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1},$$

поэтому отношение перицентрических или апоцентрических скоростей имеет вид

$$\frac{v_{1a}}{v_{2a}} = \frac{v_{1p}}{v_{2p}} = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \approx 1.5$$

Запишем систему

$$\begin{cases} v_{1p}^2 = \dfrac{G\mathfrak{M}_2^2}{a(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}\dfrac{1+e}{1-e}, \\ \dfrac{T^2}{4\pi^2} = \dfrac{a^3}{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)} \end{cases}$$

Решая ее (умножив первое уравнение на второе), получаем выражение для нахождения большой полуоси системы:

$$a = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_2}\frac{v_{1p}T}{2\pi}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 0.055 \text{ а.е.}$$

Осталось найти массы звезд:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4\pi^2 a^3}{2.5GT^2} = 1.98 \cdot 10^{30} \approx 1\mathfrak{M}_\odot,$$

$$\mathfrak{M}_2 = 1.5\mathfrak{M}_1 = 1.5\mathfrak{M}_\odot.$$

Теперь займемся получением видимых звездных величин в максимуме и минимумах блеска. Звезды принадлежат главной последовательности, поэтому можем оценить светимости звезд, используя соотношение масса-светимость для звезд ГП (массы обеих звезд близки к солнечной, поэтому $L \propto \mathfrak{M}^4$). Однако нам понадобится сравнить и размеры звезд, поэтому найдем радиусы, используя соотношение радиус-светимость $L \propto R^{5.2}$.

Сравним звезды с Солнцем.

$$L_1 = 1L_\odot,\ L_2 = 5.1L_\odot$$

$$R_1 = 1R_\odot,\ R_2 = 1.4R_\odot$$

Из закона Стефана-Больцмана определим эффективные температуры звезд.

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4 \ \Rightarrow\ T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi R^2\sigma}},$$

поэтому $T_1 = 5.8 \cdot 10^3$ K (что можно было бы и не считать — это эффективная температура Солнца), $T_2 = 7.3 \cdot 10^3$ K. Теперь, используя формулу Погсона, найдем абсолютные звездные величины:

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{0.4(M_\odot - M)},$$

откуда $M_1 = 4^m.8$ (опять-таки как у Солнца), $M_2 = 3^m.1$. Далее найдем видимые звездные величины. Поскольку

$$M = m + 5 - 5\lg r = m + 5 + 5\lg\pi,$$

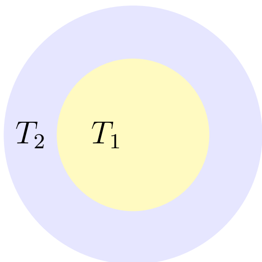
где π — годичный параллакс системы, получаем $m_1 = 6^m.3$, $m_2 = 4^m.6$.

Теперь рассмотрим три состояния системы:

- Максимум (вне затмения): в данном случае звездная величина системы равна суммарному блеску звезд:

$$m = m_2 - 2.5\lg\left(1 + 10^{-0.4(m_1 - m_2)}\right) = 4^m.4.$$

- Главный минимум: меньшая звезда затмевает бо́льшую.



Меньшая (№ 1) звезда закрывает вторую звезду не полностью, поэтому запишем формулу Погсона: сравним светимость во вторичном минимуме со светимостью одной из звезд.

$$\frac{L_{2m}}{L_1} = \frac{4\pi R_1^2\sigma T_1^4 + 4\pi(R_2^2 - R_1^2)\sigma T_2^4}{4\pi R_1^2\sigma T_1^4} = 10^{0.4(m_1 - m)}$$

$$m = m_1 - 2.5\lg\left(1 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}\cdot\frac{T_2^4}{T_1^4}\right) = 5^m.0$$

- Вторичный минимум: бо́льшая звезда затмевает меньшую. В этом случае видна только бо́льшая (№ 2) звезда, поэтому блеск системы равен звездной величине второй звезды, $m = 4^m.6$.