XXVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2021

31 января

9 класс

1. В далекой галактике произошла мощная вспышка, в результате которой выделилось 10^{55} Дж энергии. Предполагая, что эта вспышка явилась результатом падения вещества на центральную чёрную дыру, оцените количество звезд, похожих на Солнце, которые должны были бы упасть на чёрную дыру при этом. Можно считать, что при падении в виде излучения выделяется половина энергии покоя аккрецирующей массы (энергия покоя E_0 массы M равна $E_0 = Mc^2$, где c — скорость света).

Решение (8 баллов):

Определим величину массы, необходимую для вспышки. Поскольку при при аккреции массы M выделится энергия $Mc^2/2$, значит, для 10^{55} Дж необходима аккреция

$$M = \frac{2 \cdot 10^{55}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 2 \cdot 10^{38} \text{ кг}.$$

Масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг, тогда количество звезд окажется равным 10^8.

2. В конце декабря начинающий астроном из Санкт-Петербурга пронаблюдал звезду Миру Кита ($\delta = -3^\circ$) вблизи максимума блеска за два часа до ее кульминации. Он сразу же сообщил своему другу из села Хатанга (72° с.ш., 102°.5 в.д.) о своем наблюдении. Может ли наблюдатель из Хатанги увидеть Миру в течение получаса после наблюдения из Петербурга?

Решение (8 баллов):

Проверим для начала, является ли Мира восходящей для наблюдателя в Хатанге. Для этого оценим ее максимальную высоту над горизонтом, то есть высоту верхней кульминации: $h = 90^\circ - \varphi + \delta = 15^\circ$. Это положительная величина, поэтому звезда, хоть и не высоко, но поднимается над горизонтом. Заметим также, что звезда находится немного ниже небесного экватора, поэтому находится над горизонтом немногим менее половины суток.

Определим примерное время, когда Мира находится выше всего над горизонтом. Созвездие Кита находится примерно под созвездием Рыб и Овна, а Мира расположена под границей этих созвездий. Поскольку наблюдения ведутся в окрестности зимнего солнцестояния, то есть Солнце в созвездии Стрельца, то Мира будет находиться в противоположной Солнцу области, то есть кульминирует она ночью.

Долгота Санкт-Петербурга примерно равна 30°, Хатанга находится на 72.5° восточнее, поэтому время в Хатанге обгоняет петербургское на $72.5^\circ/(15^\circ/h) = 4^h50^m$. Тогда для наблюдателя в Хатанге Мира уже пройдет верхнюю кульминацию, и после нее пройдет еще около 2.5 часов. При этом, поскольку от верхней кульминации звезды до момента захода проходит лишь немногим меньше 6 часов, то звезда еще будет достаточно высоко над горизонтом. Отметим также (самое важное), что Хатанга находится за полярным кругом, поэтому в окрестности дня зимнего солнцестояния Солнце над горизонтом не поднимается, поэтому даже в утренние часы засветка не будет мешать наблюдениям.

3. Пять лет назад японская орбитальная обсерватория «Хитоми» разрушилась на орбите из-за ошибки системы ориентации, которая заставила обсерваторию слишком быстро вращаться вокруг своей оси. Оцените период вращения, при котором обсерватория стала разрушаться, если известно, что ее длина составляла 14 м.

Решение (8 баллов):

При вращении объекта на его части, находящиеся на расстоянии R от оси вращения, в системе отсчета, связанной с объектом, действует центробежное ускорение $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения.

Заметим, что то же утверждение можно сформулировать и иначе — чтобы такая часть объекта не оторвалась от него, на нее со стороны объекта должно действовать центростремительное ускорение. Оно, как известно, равно

$$a = \frac{v^2}{R},$$

и поскольку $v = \omega R$, мы получаем уже известный нам результат.

Пусть «Хитоми» не повезло и она стала вращаться т.к. что самые далекие от ее центра части оказались и наиболее далекими от оси вращения (в действительности, по-видимому, это так и было). Тогда один из концов обсерватории будет двигаться относительно другого с ускорением $a' = 2a = \omega^2 \cdot 2R = \omega^2 \cdot l$, где $l = 14$ м — длина обсерватории. Выражая период вращения через угловую скорость, получаем

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}}.$$

Осталось понять, откуда можно взять оценку a'. Однако обсерватория строилась на Земле и, следовательно, не должна была разваливаться под действием собственной тяжести, поэтому $a' \gtrsim g$. Более того, при выводе на орбиту полезная нагрузка ракет-носителей (в штатном режиме полета) испытывает перегрузки 3–4 g, поэтому в качестве нижней оценки a' можно взять $a' = 4g$. Поскольку вывод каждого лишнего килограмма на орбиту стоит очень дорого, это не только оценка максимального ускорения снизу, но и просто правдоподобная оценка — делать обсерваторию существенно прочнее, чем необходимо, попросту невыгодно. А тогда, подставляя данные в единицах СИ, получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{14}{10}} \approx 4 \text{ с}.$$

Таким образом, обсерватория должна была начать разваливаться при вращении с периодом около 4 секунд. Интересно заметить, что последующие наблюдения обломков с помощью спутниковых камер (специализированных телескопов, предназначенных для наблюдения за ИСЗ) вполне согласуются с полученным нами результатом.

4. Вокруг белого карлика по круговой орбите обращается экзопланета, период обращения равен 1/60 орбитального периода Меркурия. Известно, что радиус белого карлика равен радиусу Земли, а средняя плотность равна $9 \cdot 10^8$ кг/м^3. Могла ли планета существовать на этой орбите в то время, когда звезда еще была красным гигантом? Можно считать, что масса красного гиганта была вдвое больше массы белого карлика.

Решение (8 баллов):

Начнем с поиска массы белого карлика $\mathfrak{M}_{\text{WD}}$:

$$\mathfrak{M}_{\text{WD}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{бк}} = \frac{4}{3}\pi(10 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \text{ м})^3 \cdot 9 \cdot 10^5 \text{ кг/м}^3 = 10^{30} \text{ кг} = 0.5\,\mathfrak{M}_\odot.$$

Отсюда сразу же видно, что красный гигант имел массу, равную солнечной.

Далее можно пойти двумя различными путями. Во-первых, можно вспомнить, что эволюция звезд одинаковых масс проходит примерно одинаково, поэтому красный гигант такой массы будет очень похож на Солнце на соответствующей стадии эволюции. Известно, что при этом Солнце расширится примерно до орбиты Меркурия, следовательно, планета, орбитальный период которой при движении вокруг звезды с меньшей, чем у Солнца, массой в несколько десятков раз меньше периода Меркурия, заведомо должна находиться существенно ближе к звезде, чем Меркурий. Это означает, что ответ на вопрос задачи — нет, не могла, при этом она оказалась бы внутри красного гиганта.

Во-вторых, можно честно посчитать радиус орбиты. По III закону Кеплера большая полуось орбиты (в данном случае — радиус) a и период обращения T связаны соотношением

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\mathfrak{M}_{\mathrm{WD}}}.$$

Если выразить большую полуось орбиты в астрономических единицах, период в годах, а массу центрального объекта — в массах Солнца, то соотношение будет выглядеть так:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_{\mathrm{WD}}}.$$

Можно либо приблизительно помнить период обращения Меркурия вокруг Солнца (около 90 суток), либо помнить примерное значение большой полуоси его орбиты (0.4 а.е.), что позволит по третьему закону Кеплера оценить его орбитальный период. Таким образом, период обращения экзопланеты равен 1.5 суткам, что примерно равно $4 \cdot 10^{-3}$ года.

Тогда радиус орбиты равен

$$a = \sqrt[3]{T^2\mathfrak{M}_{\mathrm{WD}}} = \sqrt[3]{(4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0.5} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}} = 0.02\,\text{а.е.}.$$

Остается лишь прикинуть радиус Солнца в тех же единицах. Это можно и помнить, и получить (из углового размера Солнца на небе), в результате окажется, что он равен примерно 1/200 а.е. Таким образом, если при переходе на стадию красного гиганта Солнце увеличит свой размер более чем в 4 раза (а это очевидно так), то планета окажется внутри, и мы приходим к тому же ответу.

Интереса ради отметим, что подобные планетные системы действительно существуют. Прототипом для этой задачи послужил белый карлик WD 1856+534 и его планета, параметры были лишь немного округлены для удобства вычислений.

5. В некоторой планетной системе масса центральной звезды составляет 4 массы Солнца. Вокруг звезды по круговой орбите радиуса 4 а.е. вращается планета массой $3 \cdot 10^{24}$ кг. На расстоянии 400 тысяч километров от центра планеты по круговой орбите в той же плоскости вращается спутник радиусом 800 км. Определите период повторения фаз спутника для наблюдателя на планете.

Решение (8 баллов):

Задача сводится к определению синодического периода спутника для наблюдателя на планете. Сначала определим период обращения планеты вокруг звезды, пользуясь третьим законом Кеплера. Если выразить большую полуось орбиты в астрономических единицах, период в годах, а массу центрального объекта — в массах Солнца, то соотношение будет выглядеть так:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}}.$$

Отсюда

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mathfrak{M}}} = \sqrt{\frac{4^3}{4}} = 4\,\text{года}.$$

Также определим период обращения спутника вокруг планеты, пользуясь третьим законом Кеплера в сопоставлении планеты и Земли. Вспомним, что масса Земли примерно $6 \cdot 10^{24}$ кг, расстояние от Земли до Луны $4 \cdot 10^5$ км, период ее обращения (сидерический месяц) равен 27.3 суткам. Тогда радиус орбиты оказывается таким же, масса планеты — в два раза меньше массы Земли, следовательно, период обращения спутника должен быть в $\sqrt{2}$ раз больше и равняться $27.3 \cdot \sqrt{2} \approx 38$ суток, что, с учетом точности исходных данных, можно и нужно округлить до $T_s = 0.1$ года (земного).

Теперь у нас все готово для вычисления синодического периода в случаях, когда обращение спутника вокруг планеты является прямым или ретроградным… но это можно и не делать. Известно, что сидерический и синодический месяцы (обычные лунные, на Земле) отличаются меньше чем на 1/10, а в обсуждаемой планетной системе сидерический месяц увеличился заметно меньше, чем продолжительность года. Отсюда сразу же следует, что относительная разница между синодическим и сидерическим месяцами для этой планетной системы будет еще меньше, поэтому с доступной для вычислений точностью синодический месяц (как при прямой, так и при ретроградной орбите спутника) просто совпадает с сидерическим и составляет 0.1 земного года.