XXVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2021

31 января

11 класс

1. Геостационарный спутник потребовалось перевести на новую орбиту с помощью двухимпульсного перехода. Предполагалось, что первый импульс придаёт спутнику добавку скорости 10%, а второй импульс через половину периода промежуточной орбиты уменьшает скорость на 10%. Но что-то пошло не так и импульсы поменяли местами. Определите разность орбитальных периодов предполагавшейся и реально получившейся новых орбит.

Решение (8 баллов):

Перед тем как приступать к решению задачи, стоит обдумать выбор единиц, в которых ее удобнее решать. Давайте договоримся, что массу мы будем измерять в массах Земли, время — в периодах обращения геостационарного спутника (иначе говоря, в звездных сутках), расстояние — в радиусах орбиты геостационарного спутника. Как несложно показать (или сразу догадаться по аналогии с «звездноастрономической системой единиц»), в такой системе единиц гравитационная постоянная $G = 4\pi^2$.

Итак, геостационарный спутник движется по орбите со скоростью $v_0 = 2\pi$. Пусть в результате первого импульса скорость изменилась в k_1 раз, тогда она станет равной $v_1 = 2\pi \cdot k_1$. Запишем выражение для скорости в общем случае (пользуясь стандартными обозначениями):

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

и в интересующем нас частном случае:

$$4\pi^2 \cdot k_1^2 = 4\pi^2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{a_1}\right).$$

Отсюда видно, что после первого импульса спутник перейдет на орбиту с большой полуосью $a_1 = 1/(2 - k_1^2)$.

Через половину периода спутник окажется в апогее (или перигее) новой орбиты, на расстоянии $r_2 = 2 \cdot a_1 - 1$ от центра Земли. Его скорость при этом станет равной

$$v_2^2 = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_1}\right).$$

Если при этом скорость спутника изменится в k_2 раз, то спутник будет иметь большую полуось орбиты a_2, определяемую аналогичным образом:

$$k_2^2 \cdot v_2^2 = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2}\right).$$

Подставляя в последнее выражение формулы для v_2 и r_2, получаем

$$k_2^2 \cdot 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot a_1 - 1} - \frac{1}{a_1}\right) = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot a_1 - 1} - \frac{1}{a_2}\right)$$

и после очевидных преобразований имеем

$$a_2 = \frac{(2a_1 - 1)\, a_1}{2a_1 - k_2^2}.$$

Наконец, подставляя выражение для a_1, получим

$$a_2 = \frac{\frac{2}{2-k_1^2} - 1}{(2 - k_1^2)\left(\frac{2}{2-k_1^2} - k_2^2\right)} = \frac{k_1^2}{(2 - k_1^2)\,(2 - 2k_2^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}.$$

Если бы все пошло т.к. как предполагалось, то $k_1 = 1.1$, а $k_2 = 0.9$. Поэтому в результате должна была бы получиться орбита с большой полуосью

$$a_\text{п} = \frac{k_1^2}{(2 - k_1^2)\,(2 - 2k_2^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}.$$

В реальности же коэффициенты меняются местами, давайте учтем это, поменяв индексы (и сохранив числовые значения). Получилась орбита с большой полуосью

$$a_\text{н} = \frac{k_2^2}{(2 - k_2^2)\,(2 - 2k_1^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}.$$

Найдем отношение этих больших полуосей:

$$\frac{a_\text{п}}{a_\text{н}} = \frac{k_1^2\,(2 - k_2^2)\,(2 - 2k_1^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}{k_2^2\,(2 - k_1^2)\,(2 - 2k_2^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}.$$

Теперь займемся подсчетами. Предварительно имеет смысл отметить, что $1.1^2 \approx 1.2$, а $0.9^2 \approx 0.8$, а произведение $1.2 \times 0.8 \approx 1$. Тогда получается

$$\frac{a_\text{п}}{a_\text{н}} \approx \frac{1.2 \cdot 1.2 \cdot 0.6}{0.8 \cdot 0.8 \cdot 1.4} \approx 0.9.$$

Видно, что изменение оказывается небольшим и, что интересно, меньшим единицы. Аналогичный результат можно получить, если искать не отношение больших полуосей, а их разность — «правильная» большая полуось в любом случае окажется меньше «неправильной» примерно на 10% (при более точных вычислениях — на 9%).

Осталось разобраться, как это повлияет на период. Для выбранных нами единиц III закон Кеплера имеет вид $T = a^{3/2}$, и наиболее эффективный способ найти изменение периода при изменении большой полуоси — продифференцировать его. Тогда

$$dT = \frac{3}{2}\sqrt{a} \cdot da$$

и

$$\frac{dT}{T} = \frac{3}{2}\frac{da}{a}.$$

Иначе говоря, относительное изменение периода в полтора раза больше относительного изменения большой полуоси. Поскольку все рассматриваемые орбиты близки к геостационарным, относительное изменение в выбранных единицах мало отличается от абсолютного, а это означает, что периоды для предполагавшейся и реально получившейся орбит будут отличаться примерно на 14% звездных суток, т.е. примерно на 3 часа, причем реально получившийся период будет больше.

2. Известен анекдот:

> Стоим с сестрой вечером на улице, любуемся на Сириус — самую яркую звезду ночного неба. Я ей говорю:
>
> — Давай поближе подойдём, чтобы лучше видно было.
>
> И мы пошли. Секунд через 30 до неё дошло.

Допустим, дело происходит на широте $+28°$ в новогоднюю полночь, пешеходы перемещаются со скоростью 1 м/с. Оцените изменение видимой звездной величины Сириуса. Координаты Сириуса $\alpha = 6^h 45^m$, $\delta = -17°$.

Решение (8 баллов):

Начнем с выяснения обстановки. Достаточно широко известным фактом является то, что Солнце имеет прямое восхождение $18^h 40^m$ примерно в Новый год (а если неизвестно, это легко получить). Таким образом, в новогоднюю ночь Сириус находится практически в диаметрально противоположной от Солнца части неба и в полночь находится где-то рядом с верхней кульминацией. Высота его над горизонтом при этом, вычисляемая по стандартной формуле $h_{\text{ВК}} = 90° - \varphi + \delta$, окажется равной $45°$ (зенитное расстояние — тоже).

Итак, персонажи анекдота, гуляющие где-нибудь в Шарм-эш-Шейхе (широта как раз совпадает), видят Сириус на юге на высоте $45°$ и проходят на юг 30 метров. За счет чего Сириус может стать ярче?

Во-первых, они тем самым приблизились к нему на $30 \cdot \cos 45° \approx 21$ метр (не забудем, что движутся герои анекдота по горизонтали), и Сириус должен был стать ярче из-за наблюдения с более близкого расстояния. Во-вторых, во время движения Сириус испытывал фиолетовое смещение, соответствующее скорости $1 \cdot \cos 45° \approx 0.7$ м/с, что также несколько увеличило создаваемую им освещенность. Наконец, в результате перемещения Сириус поднялся над горизонтом примерно на $1''$ (полезно помнить, что $1'$ дуги меридиана — это морская миля, 1852 м, так что $1''$ соответствует расстоянию в 31 м), из-за чего поглощение его излучения в атмосфере должно было уменьшиться. Попробуем оценить величину каждого из трех эффектов.

Расстояние до Сириуса, скорее всего, точно помнят немногие, но вполне достаточно понимать, что он относится к числу близких к Солнцу звезд (потому и настолько яркий). До ближайшей звезды (α Cen) около 1.3 пк, так что если в качестве оценки расстояния до Сириуса взять 2 или 3 пк, сильно мы не ошибемся (реальное значение 2.64 пк). Завысим эффект и примем, что расстояние равно 2 пк. Это $6 \cdot 10^{16}$ м.

Вычислим изменение звездной величины Сириуса в этом случае (величины с индексом 0 — исходные, с другими числовыми индексами — соответствующие номеру рассматриваемого случая, m, как обычно, обозначаются видимые звездные величины, E — освещенности, r — расстояния):

$$\Delta m_1 = m_0 - m_1 = -2.5 \lg \frac{E_0}{E_1} = -5 \lg \frac{r_1}{r_0} = -5 \lg \frac{r_0 - \Delta r}{r_0}.$$

Тут Δr — расстояние, на которое герои приблизились к Сириусу. Перейдем от десятичных логарифмов к натуральным и получим

$$\Delta m_1 = -5 \lg \frac{r_0 - \Delta r}{r_0} = -\frac{5}{\ln 10} \cdot \ln \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0}\right) \approx \frac{5}{\ln 10} \cdot \frac{\Delta r}{r_0}.$$

Сделанное нами приближение основывается на очень полезном факте: если $x \approx 0$, то $\ln(1 + x) \approx x$.

Нас все-таки интересует только очень грубая оценка, поэтому, хотя $\ln 10 \approx 2.3$, это число вполне можно округлить до 2.5. Итого получаем

$$\Delta m_1 = 2 \cdot \frac{\Delta 2 \cdot 10^1}{6 \cdot 10^{16}} = 7 \cdot 10^{-16}.$$

Со вторым эффектом все существенно проще. Эффект Доплера, записанный для частот, имеет вид

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{0.7}{3 \cdot 10^8} \approx 2 \cdot 10^{-9}.$$

Поскольку энергия фотонов прямо пропорциональна их частоте, то и освещенность, создаваемая Сириусом, возрастет на такую же долю. Поэтому

$$\Delta m_2 = m_0 - m_2 = -2.5 \lg \frac{E_0}{E_2} = 2.5 \lg \left(1 + \frac{\Delta E}{E_0}\right).$$

Тут $\Delta E/E_0$ — это как раз найденное нами относительное изменение освещенности.

Для интереса и разнообразия изложим еще один способ это посчитать. Вообще говоря, звездные величины — это логарифмы по основанию $\sqrt[5]{100} = 2.512\ldots$, которое не слишком сильно отличается от основания натуральных логарифмов $e = 2.718\ldots$. Поэтому $2.5 \lg x \approx \ln x$ (не совсем точно, конечно, но теряемый при этом коэффициент, равный $1.086\ldots$, мало отличается от единицы и для грубых прикидок им можно просто пренебречь). А тогда

$$\Delta m_2 \approx \ln \left(1 + \frac{\Delta E}{E_0}\right) \approx \frac{\Delta E}{E_0} = 2 \cdot 10^{-9}.$$

Оценка, правда, предполагает, что чувствительность человеческого глаза, проницаемость атмосферы и т.п. не зависят от длины волны (что неверно), но поскольку Сириус белый, то все эти факторы скорее занизят полученную нами оценку (пусть и не сильно). Пока заметим для себя, что второй эффект на много порядков больше первого, и перейдем к третьему.

В узких кругах широко известна «формула воздушной массы»

$$\Delta m = 0^m.2 \cdot \sec z = 0^m.2 / \cos z,$$

описывающая поглощение света в атмосфере. Она, как и прочие модели плоской атмосферы, применима для зенитных расстояний $z \lesssim 70^\circ$, стало быть, нас тоже устроит. Поэтому

$$\Delta m_3 = m_0 - m_3 = 0.2 \cdot \left(\frac{1}{\cos z_0} - \frac{1}{\cos z}\right).$$

Тут $z_0 = 45^\circ$, а $z = z_0 - \Delta z$, причем мы уже знаем, что $\Delta z = 1''$.

Вообще говоря, малые приращения функции при малом же приращении аргумента удобно и полезно вычислять с помощью дифференциалов (см. предыдущую задачу), но мы обойдемся более простыми средствами.

$$\cos z = \cos(z_0 - \Delta z) = \cos z_0 \cos \Delta z + \sin z_0 \sin \Delta z.$$

$\cos \Delta z = 1$ (тут даже приближенное равенство писать как-то нелепо), а $\sin \Delta z$ равен Δz, выраженному в радианах. Сколько секунд в радиане, знают все, поэтому $\Delta z \approx 1/206265 = 5 \cdot 10^6$. Сразу же заметим, что $\sin z_0 = \cos z_0 = 0.7$.

Тогда

$$\Delta m_3 = 0.2 \cdot \left(\frac{1}{0.7} - \frac{1}{0.7 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-6})}\right) = \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 5 \cdot 10^{-6}}\right).$$

Воспользуемся еще одним крайне полезным фактом: при $x \approx 0$ верно $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$. Тогда мы сразу же получим, что

$$\Delta m_3 = \frac{2}{7} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-6}.$$

Остается только констатировать, что именно изменение высоты Сириуса — главная причина того, что он станет лучше виден. Две других причины приводят к существенно меньшим изменениям звездной величины.

Впрочем, заметить такое изменение, правда, совершенно невозможно даже с использованием технических средств, именно поэтому анекдот (реально существующий, см. *https://www.anekdot.ru/id/1010360/*) все же остается анекдотом.

3. Вокруг звезды главной последовательности с массой 2 массы Солнца по круговой орбите с периодом 4 года обращается планета земных размеров с разреженной атмосферой, совершающая оборот вокруг своей оси, перпендикулярной плоскости орбиты, за 20 часов. На экваторе этой планеты находится научная станция, для нужд которой рядом с ней была установлена солнечная батарея площадью 100 м^2 и эффективностью 10%. Батарея покоится на поверхности планеты и расположена в горизонтальной плоскости. Какое количество энергии за сутки производит батарея?

Решение (8 баллов):

Определим значение местной солнечной постоянной. Для этого нам нужно оценить светимость звезды. Воспользуемся соотношением масса–светимость для звезд главной последовательности: $\mathfrak{L} \propto \mathfrak{M}^4$, тогда у звезды светимость равна $L = 2^4 L_\odot = 16 L_\odot$. Также определим радиус орбиты планеты, воспользовавшись третьим законом Кеплера. Если выразить большую полуось орбиты в астрономических единицах, период в годах, а массу центрального объекта — в массах Солнца, то соотношение будет выглядеть так:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M}.$$

Отсюда $a = \sqrt[3]{MT^2} \approx 3.2$ а.е. Следовательно, освещенность на поверхности планеты будет равна

$$E_0 = \frac{L}{4\pi a^2} = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \cdot \frac{16}{(3.2)^2} \approx 1.6 E_\odot = 1.6 \cdot 1.37 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2.$$

Светлое время суток на экваторе длится около половины суток, то есть 10 часов. Заметим, что полученное ранее значение освещенности соответствует падению света на площадку перпендикулярно, но вследствие суточного вращения высота Солнца над горизонтом будет меняться, и падающая на площадку энергия будет пропорциональна $\sin h$, где h — высота светила над горизонтом.

Высота связана с широтой места наблюдения φ, склонением светила δ и часовым углом t соотношением

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t.$$

В нашем случае $\delta = 0$, поскольку плоскость экватора и орбиты совпадает, также $\varphi = 0$. Тогда $\sin h = \cos t$, то есть освещенность при часовом угле t равна $E_0 \cos t$.

Общее количество энергии, падающей на единичную площадку, можно получить интегрированием освещенности по времени:

$$W = \int_{-5^h}^{5^h} E_0 \cos t \, dt = E_0 \int_{-75^\circ}^{75^\circ} E_0 \cos t \, dt = E_0 \cdot \sin t \Big|_{-5^h}^{5^h} \cdot \frac{10^h \cdot 3600^s}{\pi}.$$

$$\sin 5^h = \sin 75^\circ \approx 1.$$

Тогда количество энергии, падающее на единичную площадку за половину суток, равно

$$W = E_0 \cdot 2 \cdot \frac{10^h \cdot 3600^s}{\pi} = 5 \cdot 10^7 \text{ Дж/м}^2.$$

Площадь S соберёт WS энергии, при учете эффективности η собранное количество энергии равно $\eta WS = 0.1 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^8$ Дж.

4. В одном и том же направлении на небе наблюдаются звезда и шарообразная однородная туманность, причем туманность подсвечивается звездой. Известно, что интегральная видимая звездная величина туманности и видимая звездная величина звезды совпадают и равны $5^m.7$, расстояние до звезды равно 0.31 кпк, абсолютная звездная величина звезды равна $-2^m.5$. Оцените расстояние между центром туманности и звездой. Что из них находится ближе к нам?

Решение (8 баллов):

Найдем видимую звездную величину m_0 звезды, которую она имела бы при отсутствии поглощения по дороге.

$$m_0 = M + 5\lg r - 5 = -2.5 + 5\ \lg 310 - 5 = -7.5 + 10 + 5\ \lg 3.1 = 2.5 + 5 \cdot 0.5 = 5^m.0.$$

Известно, что при ослаблении источника излучения в два раза его видимая звездная величина увеличивается на $0^m.75$, что, впрочем, легко получить, вычислив $\Delta m = -2.5\lg(1/2) = 2.5\lg 2$. Тогда, присмотревшись внимательнее к условию задачи, мы заметим, что излучение звезды ослабело как раз наполовину (с точностью, с которой известны исходные данные).

Дальше можно обойтись рассуждениями без формул. Совершенно очевидно, что звезда не может быть ближе к нам, чем туманность (для среднего поглощения в межзвездной среде получается слишком много, наличие еще одной туманности на луче зрения практически невероятно, так что интересующая нас туманность поглощение и обеспечивает, для чего она должна хотя бы частично находиться ближе к нам, чем звезда).

Пусть теперь звезда находится дальше, чем туманность. В таком случае туманность «забирает» половину пришедшего к ней от звезды излучения. Но переизлучать полученную энергию она должна примерно изотропно (равномерно во все стороны), а это означает, что мы увидим только какую-то сравнительно малую часть переизлученной энергии — туманность должна будет иметь большую интегральную звездную величину, чем звезда, что противоречит условию. Даже при заметно анизотропном рассеянии получится то же самое, если только вещество туманности не переизлучает свет строго в том направлении, в котором он в него попал (но, помимо общих соображений о необычных свойствах такого вещества, возникнет вопрос, как мы вообще видим такую туманность и почему она ослабляет свет звезды).

Получается, что звезда должна находиться где-то внутри туманности. Допустим, что она ближе к нам, чем центр туманности. В таком случае, раз на пути к нам поглощается половина излучения, в других направлениях туманность должна «забирать» бóльшую долю излучения звезды, и поскольку туманнность за счет нее светится (и находится фактически на том же расстоянии, что и звезда), она должна оказаться ярче, чем звезда, что противоречит условию.

Если допустить, что звезда дальше, чем центр туманности, аналогичное рассуждение приведет нас к тому, что туманность «забирает» меньше половины излучения звезды и должна быть тусклее звезды, что тоже противоречит условию. Вообще говоря, можно заметить, что случаи со звездой внутри туманности в пределе переходят в случаи, когда звезда находится снаружи перед туманностью или за ней.

Остается единственный вариант — звезда находится практически в центре туманности. Тогда половина излучения звезды выходит из туманности беспрепятственно, а еще половина расходуется на свечение туманности, что полностью согласуется с исходными данными. Тем самым ответ — расстояние между центром туманности и звездой близко к нулю.

Заметим, что у объектов задачи есть реальные прототипы — «Туманность пламенеющей звезды», она же IC 405, и находящаяся внутри нее звезда AE Возничего. Параметры лишь немного подправлены для удобства вычислений.

5. Аккрецирующая нейтронная звезда имеет светимость 10^{30} Вт, массу 1.4 $\mathfrak{M}_\odot$ и радиус 10 км. Измерения спектра нейтронной звезды показали наличие циклотронной линии с энергией фотонов 30 кэВ (частота излучения соответствует частоте вращения электрона в магнитном поле), гравитационное красное смещение уже учтено. Известно, что на границе магнитосферы динамическое давление падающего вещества уравновешивается давлением магнитного поля. Считая аккрецию сферически-симметричной и учитывая, что циклотронная линия образуется около поверхности звезды, а индукция магнитного поля зависит от расстояния до центра звезды как $B \propto r^{-3}$, оцените радиус магнитосферы для этой звезды. Давление магнитного поля можно найти по формуле $p = \kappa B^2$, где $\kappa = 4 \cdot 10^5$ Па/Тл^2.

Решение (8 баллов):

Для начала найдём из энергии фотонов циклотронной линии E величину индукции магнитного поля B_0 у поверхности нейтронной звезды. Поскольку известно, что частота линии равна частоте вращения электрона в магнитном поле, запишем второй закон Ньютона: $m\omega^2 r_e = e\omega r_e B_0$, где e — заряд электрона, m — его масса, ω — циклическая частота, r_e — радиус траектории электрона. Отсюда получаем:

$$B_0 = \frac{2\pi m E}{eh} = 2.6 \cdot 10^8 \text{ Тл.}$$

Далее найдём динамическое давление падающего вещества, чтобы приравнять его к магнитному давлению. Рассмотрим вещество, падающее на поверхность сферы радиуса r со скоростью V. Пусть за время Δt упала масса ΔM. Тогда давление есть

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta(MV)}{\Delta t\, 4\pi r^2} = \frac{\dot{M}V}{4\pi r^2},$$

где $\dot{M}$ — темп аккреции вещества, $\dot{M} = \Delta M/\Delta t$, а скорость V — это скорость свободного падения вещества с бесконечно большого расстояния: $V = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Из условия нам известна светимость звезды. Светимость за счёт аккреции и темп аккреции связаны следующим соотношением: $L = \frac{GM\dot{M}}{R}$, где R — радиус нейтронной звезды. Давление магнитного поля, как сказано в условии, рассчитывается по формуле $p = \kappa B^2 = \kappa {B_0}^2 \frac{R^6}{r^6}$. Приравнивая силы динамического и магнитного давления, получим:

$$\frac{\kappa {B_0}^2 R^6}{r^6} = \frac{\dot{M}V}{4\pi r^2}.$$

Подставив сюда зависимость темпа аккреции от светимости и формулу для скорости, получим выражение для радиуса магнитосферы:

$$r = \left(\frac{4\pi\kappa {B_0}^2 R^5 \sqrt{GM}}{L\sqrt{2}}\right)^{2/7} = 5 \cdot 10^6 \text{м}$$

Ответ: $5 \cdot 10^6$ м.