XXVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2021

31 января

---

10 класс

---

1. Капелла — тесная двойная звезда, состоящая из почти одинаковых компонент. Впервые уверенно разрешить её компоненты без использования интерферометра удалось только при наблюдениях на телескопе Хаббла в ультрафиолетовом диапазоне на длине волны 3000 Å. Оцените угловое расстояние между компонентами. Диаметр зеркала телескопа Хаббла равен 2.4 метра.

Решение (8 баллов):

Угловое разрешение

$$\alpha \approx 1.2 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1.2 \cdot \frac{3000}{10^{10} \cdot 2.4} \approx 0''.03$$

Это минимально возможное расстояние между компонентами, при котором их можно будет различить. С другой стороны, можно заметить, что результат не должен быть и существенно больше — в противном случае компоненты удалось бы разрешить и при наблюдениях в оптическом диапазоне (или при наземных наблюдениях в близком ИК-диапазоне, где эффективно можно использовать адаптивную оптику).

2. Астероид радиусом 50 метров в некоторый момент времени находился на расстоянии 0.866 а.е. от Солнца и при наблюдении с Земли угол между астероидом и Солнцем составлял 60°. Оцените видимую звездную величину астероида в этот момент. Возможно ли наблюдать его в телескоп с диаметром объектива 50 см? Оптические свойства поверхности астероида такие же, как у Луны.

Решение (8 баллов):

Применим теорему синусов к треугольнику «Солнце – Земля – астероид» и определим угол φ с центром в астероиде между направлениями на Солнце и Землю:

$$\frac{\sin\varphi}{1\,\text{а.е.}} = \frac{\sin 60^\circ}{0.866\,\text{а.е.}} \;\; \sin\varphi = 1, \;\; \varphi = 90^\circ.$$

То есть треугольник является прямоугольным. Тогда расстояние от астероида до Земли можно вычислить как

$$r = 1\,\text{а.е.} \cdot \cos 60^\circ = 0.5\,\text{а.е.},$$

и мы видим астероид, используя аналогию с Луной, в первой или последней четверти.

Дальше можно рассуждать т.к. Отношение освещенностей, создаваемых астероидом и Луной в какой-то четверти, можно вычислить следующим образом:

$$\frac{E}{E_{☾}} = \left(\frac{a_{☾}}{a} \cdot \frac{R}{R_{☾}} \cdot \frac{r_{☾}}{r}\right)^2,$$

где a — радиус орбиты астероида ($a = \sqrt{3}/2$ а.е., что можно легко заметить после вычисления расстояний выше), $a_{☾}$ — расстояние от Солнца до Луны (попросту 1 а.е.), R — радиус астероида, $R_{☾}$ — радиус Луны (равный примерно $1.7 \cdot 10^3$ км), $r_{☾}$ — расстояние от Земли до Луны (в данном случае удобнее всего вспомнить, что это примерно 1/400 а.е.). Подставляя числа, получаем

$$\frac{E}{E_{☾}} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^1}{1.7 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1/400}{1/2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^2}{3 \cdot 3 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 2.8 \cdot 10^{-14}.$$

Переход к звездным величинам можно произвести вообще без формул. Поскольку каждые два порядка эквивалентны разнице на 5^m, а коэффициент 2.8 мало отличается от $2.512\ldots$, видимая звездная величина астероида будет отличаться от видимой звездной величины Луны в четверти на $14/2 \cdot 5 - 1 = 34^m$.

Видимая звездная величина полной Луны известна и составляет $-12^m.7$. Напрашивается идея найти изменение звездной величины при уменьшении освещенности в два раза и посчитать это видимой звездной величиной Луны в четверти (если это сделать, получится с довольно хорошей точностью -12^m), однако это неправильно. Так было бы, если бы поверхность Луны рассеивала свет во всех направлениях одинаково, но это не совсем т.к. Поэтому надо вспомнить более подходящее данное: видимая звездная величина Луны в четверти составляет около -10^m. Тогда мы сразу можем сказать, что астероид будет иметь величину $+24^m$.

То, что его не удастся увидеть глазом в полуметровый телескоп, по-видимому, можно считать очевидным, да простят нас за небольшой каламбур. Интереснее отметить, что и использование более совершенных приемников излучения также не поможет: наибольшие наземные телескопы позволяют наблюдать объекты примерно $+29^m$, что соответствует освещенности, меньшей в 10^2 раз. Следовательно, надеяться зарегистрировать астероид можно при наблюдении с телескопом, линейный размер объектива которого в 10 раз меньше, чем у крупнейших наземных телескопов. Последние имеют размеры около 10 м, следовательно, необходим инструмент по крайней мере с метровым диаметром объектива.

3. Двойная система состоит из звезды с максимальным радиусом 0.10 а.е. и белого карлика, находящегося на расстоянии 0.14 а.е. от центра основного компонента. Масса белого карлика равна массе Солнца, с основного компонента на карлик идет аккреция вещества с небольшой скоростью. Оцените среднюю плотность основного компонента системы.

Решение (8 баллов):

Так как скорость изменения массы мала, то для частиц вещества основного компонента, расположенных ближе всего к карлику (они лежат на прямой, соединяющей центры звезд и удалены на максимальный радиус от центра основного компонента), векторная сумма сил гравитации и центробежной (вызванной вращением вокруг центра масс системы) должна оказаться нулевой. Отметим, что орбиты в системе должны быть круговыми (и потому, что идет постоянная аккреция, и потому, что расстояние между компонентами системы фиксировано).

Обозначим массу основного компонента $\mathfrak{M}_1$, массу карлика $\mathfrak{M}_2$, большую полуось системы (фактически расстояние между компонентами) a и максимальный радиус основного компонента R. Центр масс системы находится на расстоянии r от центра основного компонента, которое можно выразить как

$$r = a \cdot \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}$$

Тогда условие для сил — вернее, для ускорений, действующих на пробную частицу — может быть записано в виде

$$\frac{G\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \omega^2 \cdot (R - r) = \frac{G\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

где ω — орбитальная циклическая частота системы, легко определяемая из III закона Кеплера. В самом деле

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right)} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

поэтому

$$\omega^2 = \frac{G\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right)}{a^3}.$$

Собирая все воедино, получаем уравнение

$$\frac{G\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \frac{G\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right)}{a^3} \cdot \left(R - a \cdot \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\right) = \frac{G\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

в котором гравитационная постоянная G сокращается. Сначала немного упростим выражение:

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \frac{\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right) R}{a^3} - \frac{\mathfrak{M}_2}{a^2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{R^2}$$

и

$$\mathfrak{M}_2 \, \frac{R \cdot (2\,a - R)}{(a-R)^2\, a^2} + \frac{\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right) R}{a^3} = \frac{\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

а затем подставим все известные величины в массах Солнца и сотых долях астрономических единиц (чтобы не возиться с дробными числами):

$$1 \cdot \frac{10 \cdot 18}{4^2 \cdot 14^2} + \frac{(\mathfrak{M}_1 + 1) \cdot 10}{14^3} = \frac{\mathfrak{M}_1}{10^2}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{18 \cdot 14}{16} + 1\right) \cdot 10^3 = (14^3 - 10^3)\, \mathfrak{M}_1$$

или

$$17 \cdot 10^3 = 1.7 \cdot 10^3\, \mathfrak{M}_1.$$

Видно, что $\mathfrak{M}_1 \approx 10\ \mathfrak{M}_\odot$ и останется оценить только среднюю плотность. Конечно, это можно сделать, если перевести массу в килограммы, радиус — в метры и воспользоваться очевидной формулой, но можно действовать проще.

Поскольку радиус Солнца составляет примерно 1/200 а.е., то основной компонент примерно в 20 раз больше Солнца. Следовательно, его объем в $8 \cdot 10^3$ раз больше. Масса же больше солнечной в 10 раз, следовательно, плотность должна быть меньше плотности Солнца в $8 \cdot 10^2$ раза. Воспользовавшись любой разумной оценкой плотности Солнца ($1.4 \cdot 10^3$ кг/м^3, но можно просто взять плотность воды) получаем $(1 \div 2)$ кг/м^3 — что-то похоже на плотность воздуха в обычных условиях. Это и есть ответ задачи.

4. При наблюдениях двойной системы, состоящей из нейтронной звезды массой 1.4 массы Солнца и звезды главной последовательности, были обнаружены рентгеновские пульсации со средним периодом 1 секунда, отклоняющиеся от него максимум на 10^{-4} секунды. При этом спектральные наблюдения в оптическом диапазоне показали, что линия H_α также периодически меняет длину волны, отклоняясь от среднего значения максимум на 0.5 Å. Оцените светимость такой системы в оптическом диапазоне.

Решение (8 баллов):

За рентгеновские пульсации ответственна нейтронная звезда, поскольку звезды главной последовательности в рентгеновском диапазоне излучают очень слабо, а за оптическое излучение — звезда-компаньон (поскольку нейтронные звезды в оптике практически ненаблюдаемы). Найдём из эффекта Доплера орбитальную скорость нейтронной звезды:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{v_1}{c},$$

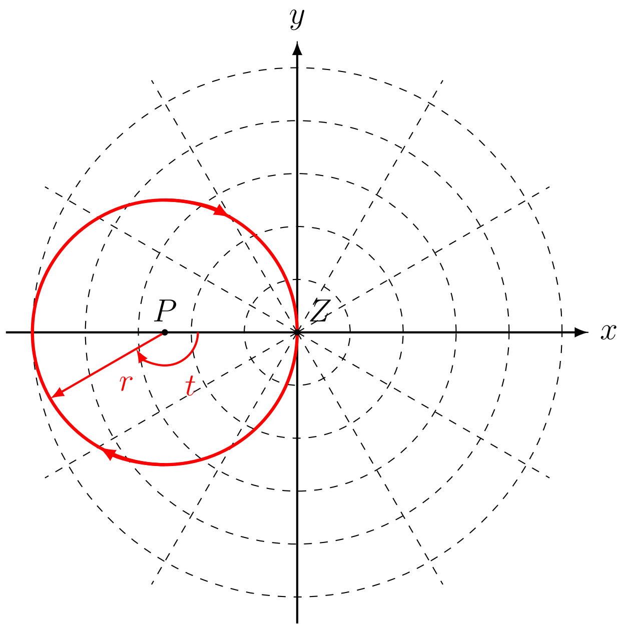
тогда $v_1 = 34$ км/с. Аналогичным образом из эффекта Доплера для линии H_α получим скорость вращения звезды-компаньона вокруг центра масс: $v_2 = 24$ км/с (для этого можно вспомнить или вычислить лабораторную длину волны линии, равную 6563 Å, но на самом деле достаточно помнить, что она попадает в оптический диапазон и красная). Орбитальные скорости, как известно, обратно пропорциональны массам компонентов, откуда видно, что масса оптического компонента равна $\mathfrak{M}_2 = \frac{v_2}{v_1}\mathfrak{M}_1 = 2\,\mathfrak{M}_\odot$.

Поскольку масса не очень сильно отличается от солнечной и мы имеем дело со звездой главной последовательности, ее оптическую светимость можно оценить, исходя из соотношения $L \propto \mathfrak{M}^4$, а она, как мы уже выяснили, и обеспечивает светимость двойной системы в оптическом диапазоне. Следовательно, ответ — 16 светимостей Солнца.

5. Звезда Гиаусар (λ Дракона) имеет координаты $\delta = 69°20'$ и $\alpha = 11^h31^m$. Ее видимая звездная величина без атмосферы равна $3^m.8$. Как зависит видимая звездная величина звезды от часового угла при наблюдениях в Мурманске? Широта города $\varphi = 68°58'$.

Решение (8 баллов):

Известно, что поглощение в зените приблизительно равно $0^m.2$. Заметим, что верхняя кульминация звезды происходит почти в зените ($h_\text{в} = 90° - |\varphi - \delta| \approx 90°$), а высота нижней кульминации ($h_\text{н} = \varphi + \delta - 90° \approx 48°$). Воспользуемся моделью плоской атмосферы, согласно которой $\Delta m \approx 0^m.2 \sec z$ при $z < 70°$. Теперь посмотрим, как меняется зенитное расстояние Гиаусара. Так как Гиаусар отстоит от полюса на $\approx 21°$ (как и полюс от зенита), примем рассматриваемый участок неба плоским, а также будем считать, что в суточном движении Гиаусар проходит через зенит. Тогда зададим декартову систему координат с центром в зените и такой ориентацией, что одна из осей проходит через полюс (и координата полюса отрицательная):



Пусть $r = 21°$ – расстояние от полюса до зенита. Тогда суточный путь звезды задается так:

$$\begin{cases} x = r\,(\cos t - 1) \\ y = -r\,\sin t \end{cases}$$

где t – часовой угол, а искомое зенитное расстояние есть

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = r\,\sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 2r\,\sin(t/2).$$

Осталось лишь подставить в начальное выражение, и тогда получим:

$$\Delta m \approx \frac{0^m.2}{\cos(42° \cdot \sin(t/2))} \approx \frac{0^m.2}{1 - (42/57)^2 \cdot \sin^2(t/2)/2} \approx \frac{1^m.6}{7 + \cos t}.$$

Можно и не пользоваться плоским приближением. Запишем сферическую теорему косинусов для параллактического треугольника:

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t.$$

Подставив выражение, приближенно получим:

$$m = 3^m.8 + \frac{1^m.6}{6.9 + \cos t}.$$