XXVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур, решения

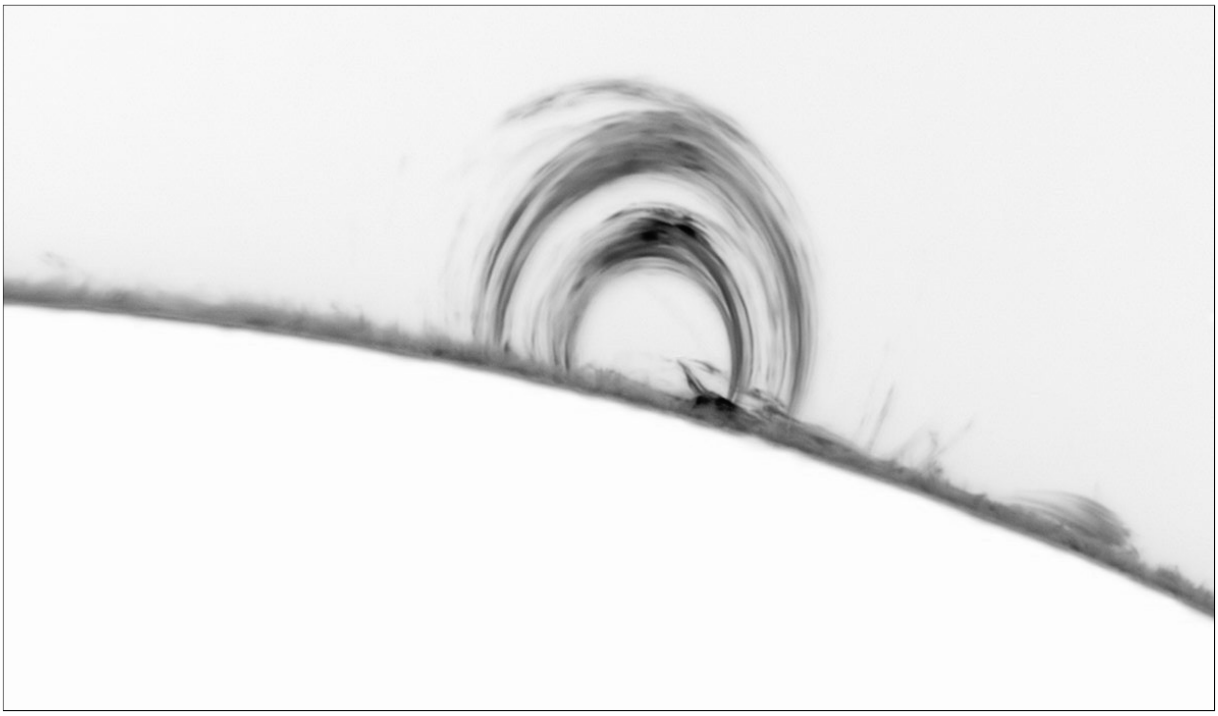
2021

14 марта

---

10 класс

Вам дано изображение (негатив) корональной петли, образовавшейся на видимом краю диска Солнца из-за выхода силовых линий магнитного поля. Оцените объем этой корональной петли, считая ее изогнутой трубкой.

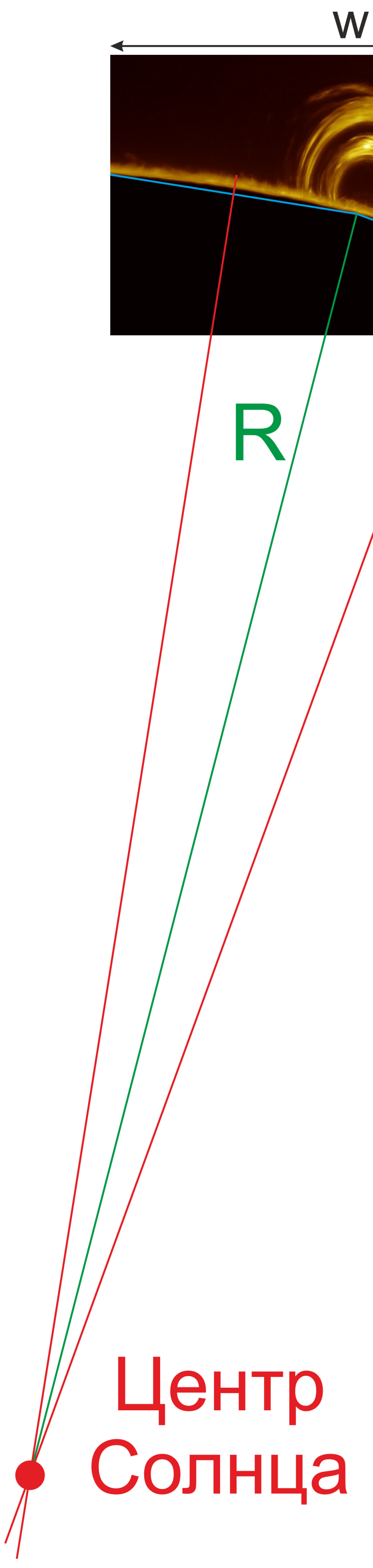


Решение (20 баллов):

Для решения задачи необходим масштаб фото. Для этого надо помнить, что радиус Солнца составляет примерно 700 тыс. км. Но есть проблема: сам радиус здесь измерить напрямую нельзя, т.к. центр Солнца находится сильно далеко за пределами фото. Существует несколько методов его определения, ниже перичислим некоторые из них. Единицей измерения длины будем считать ширину фотографии w, т.к. у всех участников, вероятно, размер фото несколько отличался (15–18 см) из-за различных типографских особенностей.

Идейно самый простой вариант — построить две хорды (голубые), считая солнечный диск окружностью, провести срединные перпендикуляры к ним (красные) и продлить их до пересечения, которое будет находиться далеко за пределами листа с условием. Данные построения можно выполнить при помощи длинной линейки, циркуля или угольника.

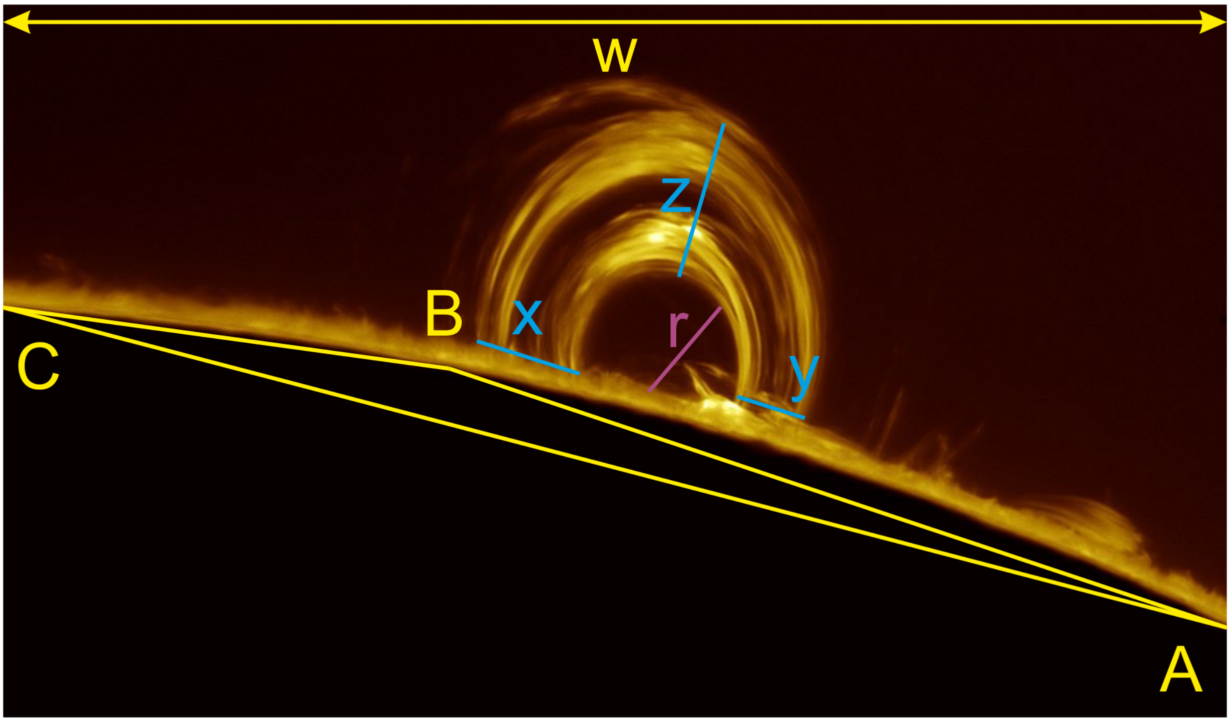
Для большей точности это следует сделать несколько раз, использовав несколько пар хорд. Тогда радиус Солнца R (зеленый) получится в 2.7 раза длиннее, чем ширина изображения w.



Идейно чуть более сложный вариант, но реализуемый в рамках одного листа бумаги — использовать теорему синусов. Если воспользоваться ею несколько раз (хотя бы для двух сторон, а еще лучше — для нескольких треугольников), то результат будет существенно точнее, т.к. очевидно, что углы в данном случае будут малы, а относительная погрешность их измерения — велика. Известно, что для любого треугольника с углами A, B, C и лежащих против них сторон BC, AC, AB соответственно выполняется равенство:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности около такого треугольника. В нашем случае он равен радиусу Солнца.



Углы $C = 7°$ и $A = 4°$ на данном рисунке можно измерить транспортиром с точностью до $1°$, а для нахождения синусов нарисовать соответствующие прямоугольные треугольники или воспользоваться приближением $\sin\alpha \approx \alpha$, если α выражен в радианах. Получаем, что $\sin C \approx \frac{7°}{57°.3}$, $\sin A \approx \frac{4°}{57°.3}$. Измерение сторон дает: $AB = 0.67w$ и $BC = 0.37w$. Таким образом, мы получаем два значения радиуса, усредняем их:

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2\sin C} + \frac{BC}{2\sin A}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.67w \cdot 57.3}{2\cdot 7} + \frac{0.37w\cdot 57.3}{2\cdot 4}\right) = \frac{57.3w}{4}\left(\frac{0.67}{7} + \frac{0.37}{4}\right) \approx 2.7w.$$

Так или иначе, радиус Солнца на данном изображении получается примерно равным $2.7w$.

Корональная петля, по условию, считается трубкой, то есть тором, а точнее — половиной тора. Будем считать, что она располагается в картинной плоскости. На фото хорошо видно, что толщина этой трубки меняется (то есть тор имеет переменное сечение), поэтому введем несколько параметров: x и y — толщина трубки у основания (слева и справа соответственно), z — толщина трубки на максимальной высоте, r — внутренний радиус трубки. Все обозначения приведены на рисунке выше.

Изменяя их линейкой, получаем: $x = 0.088w$, $y = 0.060w$, $z = 0.131w$, $r = 0.091w$. Переводим к радиусу Солнца R:

$x = 0.033R = 22.8$ тыс. км,
$y = 0.022R = 15.6$ тыс. км,
$z = 0.049R = 34$ тыс. км,
$r = 0.034R = 23.6$ тыс. км.

Объем целого тора можно найти, если вспомнить, что он является геометрической фигурой, образующейся при вращении круга вокруг оси, расположенной за пределами этого круга. Тогда если перемножить площадь поперечного сечения тора (образующего круга радиуса ρ) на длину окружности радиуса r_0, которую при вращении описывает центр этого круга (направляющей окружностью), то мы получим искомый объем V_0 целого тора:

$$V_0 = \pi\rho^2 \cdot 2\pi r_0 = 2\pi^2\rho^2 r_0.$$

В данном случае будем считать, что корональная петля состоит из четвертинок двух торов переменного сечения. Четвертинка тора от сечения шириной x до сечения шириной z имеет средний радиус $r_{xz} = r + (x + z)/4 = 48.2$ тыс.км (т.к. x и z — "диаметры"), а образующий круг имеет средний радиус $\rho_{xz} = (x + z)/4 = 14.2$ тыс. км. Вычислим объем левой «половины» корональной петли V_{xz}:

$$V_{xz} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi^2 \rho_{xz}^2 r_{xz} = \frac{\pi^2}{2} \cdot (14.2 \times 10^3)^2 \cdot 48.2 \times 10^3 \approx 48 \times 10^{3+3\times 3} \text{ км}^3 = 48 \times 10^{12} \text{ км}^3.$$

Аналогично можно найти объем V_{yz} правой «половины», а затем и полный объем V:

$$V_{yz} \approx 27 \times 10^{12} \text{ км}^3 \qquad \Rightarrow \qquad V = V_{xz} + V_{yz} = 7.5 \times 10^{13} \text{ км}^3.$$

Однако, можно учесть тот факт, что угол раскрыва петли больше 180°, поэтому итоговый ответ округляется вверх: $V = 10^{14}$ км.