

5–6 классы

1. Археолог Вася перевел надпись в древнем документе: «Когда тончайший серп, рогами обращенный на восход, близ яркой голубой звезды покажется на небосклоне, путь верный к храму он тебе укажет. . . » В какой сезон года и в какое время суток в северных широтах следует наблюдать указанное событие?

Решение (8 баллов):

Яркие голубые звезды на земном небе наблюдаются в созвездии Ориона и Большого Пса. Поскольку серп Луны назван тончайшим, то Луна вблизи фазы новолуния, при этом, поскольку рога серпа обращены на восход, то Луна растущая и недавно прошла новолуние, поэтому находится рядом с Солнцем. Орион и Большой Пес находятся ниже плоскости эклиптики ниже созвездий Близнецов и Тельца. Солнце в Тельце и Близнецах находится с середины мая до последней трети июля. Так как Луна растущая, то она наблюдается вечером после захода Солнца. Поэтому нужно в летние месяцы наблюдать Луну вечером.

2. Считается, что облако G2 теряет в год массу, равную $5 \cdot 10^{-7} M_{\odot}$. Оцените, во сколько раз масса, теряемая облаком за секунду, меньше или больше общей массы людей на Земле? Масса Солнца равна $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение (8 баллов):

Определим массу в килограммах, которую облако теряет за секунду:

$$5 \cdot 10^{-7} M_{\odot} / \text{год} = 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг/год} = 10^{24} \text{ кг/год} = 10^{24} / (3 \cdot 10^7) \text{ кг/с} = 3 \cdot 10^{16} \text{ кг/с}.$$

Население Земли к настоящему моменту превышает 7 миллиардов человек, но для оценки возьмем это значение. Поскольку нас интересует ответ с точностью до порядка, оценим среднюю массу человека как 60 кг. Тогда оценка массы человечества окажется такой: $7 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^1 = 4 \cdot 10^{11}$ кг.

Отношение теряемой облаком массы к массе людей равно

$$\frac{3 \cdot 10^{16}}{4 \cdot 10^{11}} \approx 8 \cdot 10^4.$$

3. В Древнем Египте использовался календарь, продолжительность года в котором составляла ровно 365 суток. Кроме этого, древние египтяне использовали т.н. «год Сириуса» (начало которого было привязано к первой возможности наблюдения Сириуса в лучах утренней зари), продолжительность которого составляла $365\frac{1}{4}$ суток. Интервал времени между двумя последовательными совпадениями дат начала календарного года и «года Сириуса» назывался «Великим годом».

Во время появления такой календарной традиции начало «года Сириуса» совпадало с началом разлива Нила. Допустим, что в этот же момент начался очередной «Великий

год». Раньше или позже начала следующего «Великого года» произойдет разлив Нила, и на сколько примерно суток?

Решение (8 баллов):

Начало «года Сириуса» отставало от начала египетского календарного года на $1/4$ суток ежегодно, поэтому в следующий раз начала годов должны были совпасть через $365 \cdot 4 = 1460$ «лет Сириуса» (по египетскому календарю за это время должен был пройти 1461 год), это и есть продолжительность «Великого года».

Однако реальная продолжительность года (точнее, тропического года, с которым на Земле повторяются календарные сезоны и к которому, как следствие, «привязаны» разливы Нила) чуть меньше «года Сириуса». Тут можно вспомнить продолжительность тропического года (примерно $365.2422 \dots$ суток) или, что проще, вспомнить ошибку юлианского календаря (3 суток за 400 лет), средняя продолжительность года в котором совпадает с «годом Сириуса». За 1460 лет накопится ошибка $1460/400 \cdot 3 \approx 11$ суток, причем, поскольку тропический год короче «года Сириуса» (и юлианского года), связанные с тропическим годом события будут происходить раньше. Следовательно, Нил разольется ориентировочно на 11 суток раньше начала следующего «Великого года».

4. В 2020 году состоится 2 солнечных и 4 лунных затмения. Известно, что в конце декабря 2019 года было кольцеобразное солнечное затмение, а в начале января 2020 года — полутеневое лунное. Какого типа будут остальные затмения этого года? В какой последовательности они произойдут? В какие месяцы года они произойдут? Поясните свой ответ.

Решение (8 баллов):

Как известно, причиной того, что мы не наблюдаем каждое новолуние солнечное затмение, а каждое полнолуние — лунное, является то, что орбита Луны наклонена к плоскости орбиты Земли — плоскости эклиптики (по линии эклиптики Солнце совершает свой годичный путь по небу, отражая движение Земли вокруг него). Вследствие этого затмения могут наблюдаться только тогда, когда Луна в подходящей фазе находится рядом с точкой пересечения своей орбиты с эклипкой. Такая точка называется узлом орбиты и их, очевидно, 2.

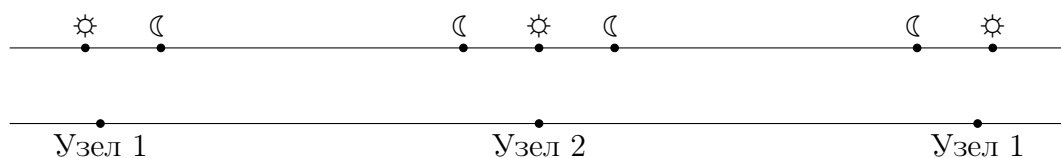
Представим, что в некоторый момент Луна, скажем, в новолунии, оказалась точно в одном из узлов. Таким образом, Луна находится точно на эклиптике (т.к. точка пересечения принадлежит одновременно и орбите Луны, и эклиптике) и при этом, т.к. она в новолунии, то в том же самом направлении с Земли видно Солнце, которое также находится на эклиптике (т.к. оно всегда находится на эклиптике). В этот момент мы видим Солнце и Луну как бы в одной точке неба. Происходит солнечное затмение, причем полное (или кольцеобразное, если, например, Луна при этом в апогее своей орбиты). Ясно, что примерно через полмесяца (более точно, через половину сидерического (звездного) месяца) Луна придет ко второму узлу орбиты (и та же картина будет примерно полумесяцем раньше). Так как период смены фаз Луны немного длиннее того промежутка, за который Луна делает полный оборот вокруг Земли, то, дойдя до узла, она еще не будет в полнолунии, то есть в противоположной Солнцу точке неба, т.к. Солнце за эти полмесяца уйдет по эклиптике от того узла, в котором произошло затмение. Полнолуние наступит чуть больше, чем через сутки, за которые Луна тоже отойдет от узла. Так что затмение в данном случае лунное, хоть и произойдет (т.к. Луна не очень далеко успела отойти от узла), но уже будет частным, а то и полутеневым. Еще через полмесяца, когда Луна снова подойдет к узлу, в котором было солнечное затмение, Солнце успеет отойти от этого узла настолько далеко, что в это новолуние затмение уже не состоится. Придется ждать примерно полгода, чтобы Солнце по эклиптике пришло уже к другому узлу лунной орбиты и затмения повторились уже там.

Таким образом, в промежуток длиной примерно в год бывает 2 «сезона», благоприятных для затмений. Продолжается каждый из них чуть больше месяца (т.к. Луне не обязатель-

но быть совсем точно в узле, чтобы было затмение), а промежуток между ними составляет чуть меньше полугода. Строго говоря, ровно 2 периода затмений приходятся на промежуток, равный т.н. драконическому году — периоду прохода Солнца через один и тот же узел лунной орбиты, продолжительность которого немного меньше календарного.

Так как «затменные сезоны» продолжаются около месяца, то каждый из них происходит по 2 затмения, одно солнечное, одно лунное, а максимально может произойти 3 затмения: в самом начале, в середине и в самом конце. В таком случае те затмения, лунные или солнечные, которые оказываются на краях промежутка, будут частными с малой фазой (долей затененной площади от всей площади диска), а в случае лунных могут быть и вовсе полутеневыми. А то затмение, лунное или солнечное, которое произойдет посередине между ними, наоборот, будет полным (в случае солнечного может быть кольцеобразным) и, скорее всего, довольно продолжительным. «Идеальный» вариант с таким солнечным затмением описан выше.

Вернемся к ситуации 2020 года. Одно полутеневое лунное затмение состоялось в начале января, а полный «затменный сезон», в котором было это затмение, был, в основном, в декабре 2019 года, т.к. там было кольцеобразное солнечное затмение (которое должно быть близко к середине «сезона»). Так что в январе затмений больше не будет. Таким образом, на 2020 год придется еще один полный «затменный сезон», который наступит примерно через полгода, т.е. в июне, и еще один, или его часть (это зависит от точных дат затмений), который придется на декабрь. В эти два оставшихся сезона должно произойти 2 солнечных и 3 оставшихся лунных затмения. Так как всего оставшихся затмений 5, то на один из «сезонов» придется 3 затмения, а на другой — 2. Лунные и солнечные затмения в пределах «сезона» чередуются, так что очевидно, что 2 солнечных придутся на июнь и декабрь, а лунные распределятся между «сезонами» так: 2 и 1. Осталось понять, в июне или в декабре произойдет 3 затмения. В любом случае то солнечное затмение, которое придется на «сезон» из 3-х затмений, будет полным или кольцеобразным. Логично предположить, что, т.к. промежуток между сезонами не сильно отличается от полугода, а период смены лунных фаз мало отличается от продолжительности среднего месяца, то условия возникновения затмений будут меняться плавно и следующее солнечное затмение тоже будет полным или кольцеобразным. Следовательно, все лунные будут не более, чем частными с малой фазой, а, скорее даже полутеневыми (как в начале года). Но понять, в июне или декабре будет 2 лунных затмения — самая сложная часть задачи. Можно рассуждать так. Так как промежуток между «затменными сезонами» немного короче 6 лунных месяцев, то весь «сезон» как целое смещается назад по времени относительно момента, когда Солнце приходит к узлу лунной орбиты (см. рис., где ☼ отмечает новолуние и солнечное затмение, а ☾ — полнолуние и лунное). Так что, если в декабрьско-январском «сезоне» за солнечным затмением следовало лунное, то далее смещение сезонов должно привести к тому, что лунное затмение будет предшествовать солнечному. Значит, скорее всего, в июне лунные затмения будут «окружать» солнечное с обеих сторон, а в декабре лунное будет перед солнечным.



Таким образом, скорее всего, в июньском «сезоне» будет 3 затмения: в середине произойдет полное (или кольцеобразное) солнечное затмение, а по краям — лунные, которые, скорее всего будут полутеневыми. Аналогично, скорее всего, в начале декабрьского «сезона» произойдет полутеневое лунное затмение, а в середине — полное (или кольцеобразное) солнечное.

Точные даты и типы затмений 2019 года:

- 10 января — полутеневое лунное;
- 5 июня — полутеневое лунное;
- 21 июня — кольцеобразное солнечное;
- 5 июля — полутеневое лунное;
- 30 ноября — полутеневое лунное;
- 14 декабря — полное солнечное.

5. Звезда δ Цефея известна тем, что она пульсирует: у нее регулярно меняются размеры. Она имеет массу, равную 5 массам Солнца, а ее средний радиус — 40 радиусов Солнца. Полное изменение диаметра составляет 7 миллионов километров, период пульсаций — 5.4 дня. Определите, во сколько раз отличаются максимальная и минимальная плотности звезды, найдите средние скорости, с которыми поверхность звезды движется по отношению к ее центру при расширении и сжатии звезды, если известно, что сжатие длится в три раза меньше по времени, чем расширение. Радиус Солнца равен 700 тысяч километров.

Решение (8 баллов):

Сперва переведем изменение диаметра рассматриваемой звезды из километров в радиусы Солнца: 7 миллионов км — это 10 радиусов Солнца. Соответственно, радиус меняется на 5 радиусов Солнца, то есть от среднего значения отстоит на 2.5 радиуса Солнца. Тогда самый большой радиус звезды будет равняться 42.5 радиусов Солнца, а самый маленький — 37.5.

Разберемся с первым вопросом задачи: найдем отношение плотностей. По определению плотность ρ есть отношение массы тела M к его объему V :

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Объем любого тела пропорционален третьей степени его линейного размера (в данном случае — радиусу): $V \sim R^3$.

Заметим, что масса звезды в ходе рассматриваемых процессов не изменяется, форма звезды — тоже. Изменяется лишь ее размер. Понятно, что если объект больше при той же массе, то его плотность будет меньше. Обозначим индексом \max состояние звезды, когда ее плотность максимальна, и индексом \min , когда минимальна. Запишем это:

$$\rho_{\max} = \frac{M}{V_{\max}} \sim \frac{M}{R_{\max}^3}; \quad \rho_{\min} = \frac{M}{V_{\min}} \sim \frac{M}{R_{\min}^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^3$$

Осталось не перепутать радиусы и посчитать результат. Значения радиусов можно подставлять в радиусах Солнца, т.к. их отношение будет одинаковым независимо от того, выражено оно в метрах, миллиметрах и т.д.

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \left(\frac{42.5}{37.5} \right)^3 = \left(\frac{17}{15} \right)^3 = \frac{4913}{3375} \approx 1.5.$$

Разберемся со вторым вопросом задачи. Расширение звезды длится в три раза дольше, чем сжатие, значит (исходя из периода), звезда расширяется в течение 4.05 суток, а сжатие — 1.35 суток. Получить это можно из тех соображений, что сжатие занимает 1/4 долю от всего периода пульсаций. Соответственно, скорости также должны отличаться в три раза.

И при сжатии, и при расширении поверхность звезды проходит 5 радиусов Солнца. Считая, что каждая точка поверхности движется прямолинейно и равномерно относительно

центра звезды, можно найти средние скорости расширения и сжатия. Скорость расширения v :

$$v = \frac{5 \text{ радиусов Солнца}}{4.05 \text{ суток}} = \frac{5 \times 700000 \text{ км}}{4.05 \text{ суток}} \approx 36 \text{ тыс. км/ч} = 10 \text{ км/с.}$$

Аналогично считается скорость сжатия v' :

$$v' = \frac{5 \text{ радиусов Солнца}}{1.35 \text{ суток}} \approx 108 \text{ тыс. км/ч} = 30 \text{ км/с.}$$