XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2017–2018

15 декабря
18 января

10 класс

1. Эффективная температура красного гиганта в 2 раза меньше эффективной температуры Солнца. Его радиус составляет 70 радиусов Солнца. Определите абсолютную звездную величину красного гиганта.

Решение (8 баллов):

Известно, что светимость звезды L, ее радиус R и эффективная температура T связаны соотношением $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана. Записав это выражение для красного гиганта и для Солнца и разделив одно на другое, получаем

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4.$$

Поскольку абсолютная звездная величина произвольной звезды M связана с ее светимостью как $M = -2.5 \lg L + \text{const}$, то получаем

$$M_* - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L_*}{L_\odot},$$

откуда

$$M_* = M_\odot - 5 \lg \frac{R_*}{R_\odot} - 10 \lg \frac{T_*}{T_\odot}.$$

Подставляя числа и учитывая, что $M_\odot \approx 5^m$, получаем $M_* = 5 - 5 \lg 70 - 10 \lg \frac{1}{2} \approx -1^m$.

2. При вспышке сверхновой в виде нейтрино выделилась энергия около 10^{46} Дж. Какую суммарную массу должны иметь тела, состоящие из материи и антиматерии, при аннигиляции которых выделилось бы столько же энергии?

Решение (8 баллов):

При полной аннигиляции массы M выделяется энергия $E = Mc^2$, где c — скорость света в вакууме, равная $3 \cdot 10^8$ м/с. Следовательно, искомая масса равна

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{10^{46}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 10^{29} \text{ кг}.$$

3. Один крайне наблюдательный астроном заметил следующее:

- высота верхней кульминации некоторой звезды в два раза больше высоты ее нижней кульминации;
- склонение этой звезды в три раза больше широты города, где живет данный астроном.

Найдите склонение звезды, высоты ее кульминаций, а также широту города, где живет астроном.

Решение (8 баллов):

Составим две системы уравнений, исходя из условия задачи: одну для случая верхней кульминации к югу (S) от зенита, вторую — к северу (N), как обычно, обозначая φ широту города, δ — склонение звезды, а h (с соответствующими индексами) — высоты в кульминациях:

$$\begin{cases} h_{BKS} = 90^\circ - \varphi + \delta \\ h_{HK} = \varphi - 90^\circ + \delta \\ h_{BKS} = 2h_{HK} \\ \delta = 3\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} h_{BKN} = 90^\circ + \varphi - \delta \\ h_{HK} = \varphi - 90^\circ + \delta \\ h_{BKN} = 2h_{HK} \\ \delta = 3\varphi \end{cases}$$

Решая вторую систему (например, подставляя первое и второе уравнения в третье, а затем учтя четвертое) получим, что $\varphi = 27^\circ \Rightarrow \delta = 81^\circ$. Соответственно, $h_{BKN} = 36^\circ; h_{HK} = 18^\circ$.

Решая первую систему аналогичным способом, получаем $\varphi = 45^\circ \Rightarrow \delta = 135^\circ$, что невозможно.

Осталось не забыть, что южное полушарие ничем не хуже северного, поэтому итоговый ответ таков: широта города $\pm 27^\circ$; склонение звезды $\pm 81^\circ$ (причем знак соответствует знаку широты); высота в верхней кульминации 36°; высота в нижней кульминации 18°.

4. Два радиотелескопа РТ-32 Института прикладной астрономии РАН, расположенных в Ленинградской области и в Республике Бурятия, проводят совместные наблюдения в режиме интерферометра на длине волны 13 см. Оцените угловое разрешение такого интерферометра в секундах, если известно, что расстояние между обсерваториями составляет примерно 4300 км.

Решение (8 баллов):

Угловое разрешение интерферометра примерно равно тому угловому разрешению, которое имел бы один инструмент, наблюдающий на той же длине волны и имеющий размеры, равные расстоянию между компонентами интерферометра. Следовательно, угловое разрешение (в радианах) $\beta \approx \lambda/D$, где $\lambda = 13$ см, $D = 4300$ км. Поскольку в одном радиане примерно $2 \cdot 10^5$ угловых секунд, итоговый ответ вычисляется как

$$\beta'' = 2 \cdot 10^5 \, \frac{13}{4.3 \cdot 10^3 \cdot 10^5} \approx 0''.006$$

5. 15 сентября 2017 года в атмосфере Сатурна сгорела АМС Кассини. В качестве одного из вариантов окончания миссии Кассини-Гюйгенс рассматривался вариант столкновения АМС с Меркурием. Оцените, когда могло бы произойти такое столкновение и с какой относительной скоростью, если траектория полета была бы наименее энергозатратной. За момент отлета от Сатурна принять вышеуказанную дату. Для достижения каких целей можно было бы реализовать этот вариант?

Решение (8 баллов):

Наименее энергозатратный перелет между двумя планетами — это движение по эллипсу Гомана, апоцентр которого находится на орбите Сатурна, а перицентр — на орбите Меркурия. Поскольку нас интересует оценка, то орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Тогда, выяснив, что радиус орбиты Сатурна составляет примерно 9.5 а.е., а радиус орбиты Меркурия — около 0.4 а.е., получаем, что большая полуось эллипса Гомана равна

$(9.5+0.4)/2 \approx 5$ а.е. Воспользовавшись III законом Кеплера и учитывая, что время перелета — это половина периода обращения по такой орбите, получим, что до орбиты Меркурия "Кассини" долетит через $\sqrt{125}/2 = 5.6$ лет, т.е. ориентировочно в марте 2023 года.

Отметим, что для столкновения с Меркурием необходимо, чтобы в этот момент Меркурий находился в точке, диаметрально противоположной (по отношению к Солнцу) к точке старта с орбиты Сатурна, а этого может и не произойти. Как следствие, март 2023 года — это только самый ранний возможный срок столкновения. Возможно, старт с орбиты Сатурна пришлось бы перенести на более позднее время (очевидно, что возможный диапазон моментов старта в такой ситуации примерно совпадает с периодом обращения Меркурия вокруг Солнца, т.е. столкновение произошло бы в марте–июне 2023 года).

Для оценки скорости воспользуемся интегралом энергии:

$$v_C = \sqrt{G\mathfrak{M}_\odot \left(\frac{2}{a_☿} - \frac{1}{a_C}\right)} \approx \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{20/96 \text{ а.е.}}} \approx \sqrt{5} \cdot v_\oplus,$$

где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_\odot$ — масса Солнца, $a_☿$ — радиус орбиты Меркурия, a_C — большая полуось эллипса Гомана, $v_\oplus$ — орбитальная скорость Земли. Вычисляем орбитальную скорость Меркурия (учитывая, что скорость движения по круговой орбите вокруг Солнца обратно пропорциональна корню из радиуса орбиты):

$$v_☿ = v_\oplus/\sqrt{0.4} = \sqrt{2.5} v_\oplus.$$

Поскольку старт с орбиты Сатурна должен был производиться в ту же сторону, в которую вокруг Солнца вращаются планеты (иначе перелет не был бы энергетически выгодным), то "Кассини" будет догонять Меркурий, и относительная скорость столкновения составит $\Delta v = (\sqrt{5} - \sqrt{2.5}) \cdot v_\oplus \approx 0.66 \cdot 30$ км/с $= 20$ км/с.

Отметим, что при сближении с Меркурием аппарат будет дополнительно разогнан гравитационным полем самого Меркурия, однако соответствующей поправкой можно пренебречь. Масса Меркурия невелика, вторая космическая скорость для Меркурия составляет всего около 4 км/с, и аккуратный подсчет показывает, что дополнительное увеличение скорости столкновения будет меньше 1 км/с.

Поскольку аппарат достаточно массивный (около 5 тонн), его столкновение с Меркурием на большой скорости должно было бы привести к заметному выбросу вещества с поверхности планеты, которое можно было бы наблюдать и, в частности, проводить спектральные наблюдения. Тем самым такие наблюдения стали бы существенным источником информации о химическом составе и физическом состоянии поверхности Меркурия.