XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

---

9 класс

---

1. Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> ...звезда с звездою говорит.
> — Который час?
> — Двенадцатый, примерно...
> — А на Земле в этот час лучше всего видно нас......

Считая, что разговор происходит сегодня, оцените возможные значения экваториальных координат разговаривающих звезд.

Решение (8 баллов):

Лучше всего звезды видны тогда, когда они находятся в верхней кульминации. Поскольку на Земле «примерно двенадцатый» час, можно считать, что действие происходит в истинную солнечную полночь, т.е. прямые восхождения Солнца и разговаривающих звезд отличаются примерно на 12^h.

Прямое восхождение Солнца в момент весеннего равноденствия по определению равно 0^h, а затем в течение года примерно равномерно увеличивается до 24^h, на 2^h за один месяц. Поскольку сегодня 5 февраля, то до очередного весеннего равноденствия (которое случится 20 марта) осталось полтора месяца. Следовательно, сегодня прямое восхождение Солнца равно примерно 21^h, а прямое восхождение разговаривающих звезд около 9^h.

Попробуем оценить склонение звезд. Во-первых, отметим, что условия видимости звезд тем слабее зависят от времени, чем дальше от небесного экватора эти звезды находятся. В самом деле, например, околополярные звезды в некоторой местности либо всегда видны (и примерно на одной и той же высоте над горизонтом), либо, наоборот, не видны совсем. Во-вторых, поскольку звезды лучше видны «на Земле», а не в каком-то определенном месте Земли, то, по-видимому, это означает, что их принципиально можно наблюдать практически со всей Земли. Отсюда получаем второй вывод — говорящие звезды находятся примерно на экваторе, т.е. их склонение близко к нулю.

2. Звезда Барнарда (V2500 Oph) имеет: собственное движение по прямому восхождению $-0.8''$/год, по склонению $10''.3$/год; ее лучевая скорость равна -110 км/с; ее годичный параллакс составляет $0''.55$. Определите, когда ее полное собственное движение было (или будет) максимальным. Чему оно при этом будет равно?

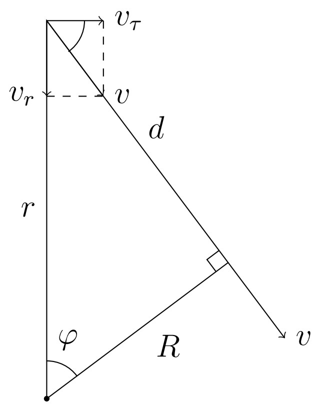
Решение (8 баллов):

Начнем с терминологического уточнения. Собственное движение — это угловая скорость движения звезды по небесной сфере. Соответственно, собственное движение по какой-то координате — это компонента угловой скорости, направленная перпендикулярно линии, на которой соответствующая координата не меняется, но (в общем случае) не скорость изменения этой координаты! Конечно, в случае собственного движения по склонению разница между этими двумя вариантами отсутствует, но вот в случае прямого восхождения ситуация иная. Разница будет отсутствовать в том случае, если звезда находится на небесном экваторе, но по мере приближения к полюсам одной и той же компоненте угловой скорости будет соответствовать все большая скорость изменения координаты. Сделав чертеж, можно обнаружить, что если скорость изменения прямого восхождения равна μ_α, то собственное движение по прямому восхождению равно $\mu_\alpha \cos\delta$, где δ — склонение звезды. В условии задачи дана уже вторая величина, с внесенной поправкой за $\cos\delta$, поэтому для определения общего собственного движения координаты звезды Барнарда не нужны.

Заметим, впрочем, что в данном случае учет изложенного выше обстоятельства практически не играет роли — звезда Барнарда очень удачно для нас движется в основном по склонению. Конечно, можно попытаться вычислить «более точное» значение собственного движения $\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2}$, однако эта попытка, даже если она увенчается успехом, даст в результате «точное» значение $\mu = 10''.331\ldots/$год, которое с имеющейся в нашем распоряжении точностью исходных данных ничем не отличается от $\mu = \mu_\delta = 10''.3/$год.

Далее отметим, что лучевая скорость звезды Барнарда отрицательна, т.е. она направлена к нам. Таким образом, звезда сейчас приближается к Солнцу и в некоторый момент пройдет от него на минимальном расстоянии. В этот момент лучевая скорость звезды станет нулевой, пространственная скорость звезды v совпадет с тангенциальной скоростью (которая тем самым станет наибольшей), и, поскольку собственное движение звезды представляет собой отношение тангенциальной скорости к расстоянию до звезды, собственное движение в этот момент также станет наибольшим.

Построим чертеж:



Здесь r — расстояние до звезды Барнарда, $v_\tau = \mu \cdot r$ — тангенциальная скорость звезды Барнарда, v_r — ее лучевая скорость (все в данный момент), d — расстояние, которое звезда Барнарда пройдет до момента максимального сближения с Солнцем, R — минимальное расстояние от звезды Барнарда до Солнца.

Определим современное расстояние до звезды Барнарда r. Поскольку нам дан ее годичный параллакс π в секундах, то расстояние равно $r = 1/\pi = 1.8$ пк.

Для удобства дальнейших вычислений заметим, что в качестве единиц скорости проще использовать не километры в секунду, а астрономические единицы в год. Пересчитать одно в другое несложно, если вспомнить, что орбитальная скорость Земли составляет примерно 30 км/с и 6.28 а.е./год. Получаем, что 1 а.е./год$\approx$ 4.7 км/с.

Почему это удобно? Мы знаем, что сейчас на небесной сфере звезда Барнарда перемещается на $10''.3/$год. Известно, что с расстояния 1 пк под углом $1''$ видно расстояние 1 а.е. (просто по определению парсека). Поскольку все рассматриваемые углы малы, то это означает, что собственное движение $10''.3/$год на расстоянии 1.8 пк соответствует тангенциальной скорости $v_\tau = 1.8 \cdot 10.3 = 18$ а.е./год (сохранять больше значащих цифр не стоит — один из сомножителей имел только две значащих цифры, следовательно, и результат будет иметь столько же). Лучевая скорость $v_r = 110$км/с ≈ 23 а.е./год (будем для удобства использовать ее модуль, поскольку всю необходимую информацию из ее знака мы уже получили и учли). Таким образом, полная пространственная скорость звезды $v = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} \approx 29$ а.е./год (заметим, что соответствующее вычисление можно легко заменить построением прямоугольного треугольника с катетами соответствующей длины (например, в сантиметрах) и измерением линейкой длины его гипотенузы).

Теперь найдем угол φ, отмеченный на чертеже (вернее, его синус и косинус, поскольку нужны нам на самом деле именно они). Из рисунка видно, что $\sin\varphi = v_r/v = 23/29$, $\cos\varphi = v_\tau/v = 18/29$. Тогда $d = r\sin\varphi = 1.4$ пк и $R = r\cos\varphi = 1.1$ пк.

Осталось получить окончательный ответ. В тот момент, когда звезда Барнарда сблизится с Солнцем на минимальное расстояние, ее собственное движение $\mu_{\max} = v/R$. Использованные нами единицы позволяют сразу же подставить числа и получить $\mu_{\max} = 29/1.1 = 26''$/год.

Для определения времени, когда это случится, следует вспомнить, что в одном парсеке примерно 206265 астрономических единиц (естественно, именно такая точность не требуется). Соответственно, расстояние $d = 1.4$ пк со скоростью 29 а.е./год звезда Барнарда пройдет за время, равное $1.4 \cdot 2.06 \cdot 10^5/29 = 10^4$ лет.

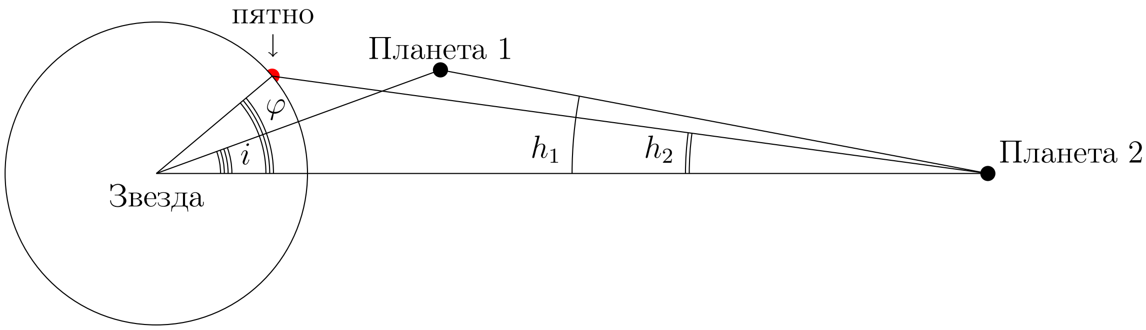
Наконец заметим, что мы совершенно не обсуждали два, казалось бы, возможных фактора: движение самого Солнца и то, что звезды могут двигаться не прямолинейно и равномерно. Однако в данном случае это не требуется.

Учет движения Солнца не нужен, поскольку все данные в условии величины определяются именно относительно него, т.е. мы с самого начала работали в системе отсчета, в которой Солнце покоится. Что же касается возможного отклонения движения звезд от прямолинейного и равномерного, то, с одной стороны, у нас нет данных, позволяющих это учесть, с другой — подобное отклонение может быть связано либо с вращением звезд вокруг центра Галактики, либо с гравитационным влиянием звезд друг на друга. Период обращения Солнца (а также близких звезд, вроде звезды Барнарда) вокруг центра Галактики на четыре порядка больше, чем интересующие нас интервалы времени, поэтому этим фактором мы действительно можем пренебречь, а для существенного изменения пространственных скоростей звезд из-за взаимодействия друг с другом звезды должны сблизиться на малое расстояние. Однако мы сами только что получили оценку характерного времени сближения и минимального расстояния для одной из ближайших к Солнцу звезд, которая к тому же нестандартно быстро движется. Очевидно, что других претендентов на близкое сближение с Солнцем или звездой Барнарда за интересующие нас недолгие 10 тысяч лет, просто не имеется.

3. В некоторой планетной системе звезда имеет радиус, равный солнечному. Одна из планет имеет радиус орбиты 0.3 а.е., вторая — 2 а.е. Плоскость орбиты первой планеты наклонена на 5° к плоскости вращения звезды, орбита второй планеты лежит в плоскости вращения звезды. На поверхности звезды имеется пятно на широте +10°. Можно ли с экватора второй планеты наблюдать затмение первой планетой пятна, если ось вращения второй планеты перпендикулярна плоскости ее орбиты?

Решение (8 баллов):

Пусть a — радиус орбиты Планеты 1 , i — ее наклон, φ — широта пятна, R — радиус звезды, r — радиус орбиты Планеты 2. Построим рисунок (для наглядности радиус звезды и углы сильно преувеличены):



Максимальная высота первой планеты при наблюдении со второй

$$h_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{a \cdot \sin i}{r - a \cdot \cos i}\right).$$

Все углы в этой формуле малые, поэтому арктангенс и синус соответствующих углов равны им самим, выраженным в радианах, а косинус можно с очень хорошей точностью считать равным 1. Заметим, что при пересчете синуса и арктангенса коэффициент, связывающий радианы и градусы, войдет в формулу дважды: в знаменатель и в числитель, и тем самым сократится. Тогда формулу можно переписать в виде :

$$h_1 = \frac{a \cdot i}{r - a},$$

где угол i выражен в градусах. Отсюда получаем, что $h_1 = 0^\circ.88$.

Заметим, что это значение больше, чем угловой радиус звезды, видимый с Планеты 2 ($0^\circ.5/4 = 0^\circ.125$). Тем самым высоту пятна для наблюдателя h_2 можно не вычислять. Очевидно, что покрытие принципиально возможно, если только пятно «доживет» до подходящего момента.

4. Оцените путь, который Солнце проходит в Солнечной системе (относительно центра масс Солнечной системы) за год.

Решение (8 баллов):

Для того, чтобы найти скорость движения Солнца относительно центра масс (барицентра) Солнечной системы, следует понять, почему центр Солнца не совпадает с барицентром. Это является следствием наличия в Солнечной системе других массивных тел. Что это за тела?

Очевидно, что они должны быть достаточно тяжелыми. Самое тяжелое, что имеется — планеты. Если некоторая планета имеет период обращения вокруг Солнца, равный P, радиус орбиты r и массу m, то в таком случае скорость ее движения по орбите $v = 2\pi r/P$. Из закона сохранения импульса (или правила рычага вкупе с определением положения центра масс) следует, что $mv = MV$, где M — масса Солнца, а V — его скорость относительно центра масс.

Тогда

$$V = 2\pi \frac{r}{P}\,\frac{m}{M},$$

и, учитывая III закон Кеплера ($P = r^{3/2}$, если периоды мы измеряем в годах, а расстояния — в астрономических единицах), окончательно получаем

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{r}}\,\frac{m}{M}.$$

Массы всех планет земной группы явно слишком малы, и их можно не учитывать. Остаются планеты-гиганты. Однако, поскольку самая массивная планета-гигант — Юпитер —

одновременно является и самой близкой к Солнцу, очевидно, что именно Юпитер является главной причиной движения Солнца вокруг центра масс Солнечной системы. Радиус его орбиты составляет около 5 а.е., масса составляет около 1/1000 массы Солнца, поэтому

$$V \approx \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5}} 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ а.е./год.}$$

Соответственно, за один год Солнце проходит около 0.003 а.е. При желании ответ можно (но не обязательно нужно) перевести, например, в километры, получится примерно $4 \cdot 10^5$ км — расстояние, сравнимое с расстоянием от Земли до Луны.

5. Звезда, имеющая видимую звездную величину 5^m, расположена на расстоянии 100 пк от Солнца. На каком расстоянии от звезды должна располагаться планета, чтобы количество энергии, приходящее на единицу площади планеты, было таким же, как на Земле от Солнца?

Решение (8 баллов):

Абсолютная звездная величина Солнца примерно $+5^m$. Это означает, что Солнце, находясь на расстоянии 10 пк, имело бы видимую звездную величину $+5^m$. Если Солнце будет располагаться в 10 раз дальше, то освещенность, создаваемая им (прямо пропорциональная светимости и обратно пропорциональная квадрату расстояния) станет меньше в 10^2 раз. Следовательно, светимость звезды в 100 раз больше, чем светимость Солнца. Тогда для того, чтобы освещенность, создаваемая звездой на планете, совпадала с освещенностью, создаваемой Солнцем на Земле, нужно, чтобы планета располагалась от звезды в 10 раз дальше, чем Земля от Солнца, т.е. искомое расстояние должно равняться 10 а.е.