

XXIV Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

2017
12
марта

9 класс

Вы высадились на совершенно неизвестную планету, какие-либо данные о которой у Вас отсутствуют. Условия на планете более-менее пригодны для жизни, в частности, атмосфера прозрачна в оптическом диапазоне. Рельеф на планете почти отсутствует, место посадки находится на большом ровном участке, уходящем за горизонт. Период вращения планеты вокруг оси существенно меньше периода ее обращения вокруг звезды, угол наклона плоскости экватора планеты к плоскости ее орбиты вокруг звезды не превышает 45° .

Вам необходимо оценить:

- продолжительность местных «солнечных» суток;
- продолжительность года;
- свою широту;
- радиус планеты;
- массу планеты.

В вашем распоряжении имеются: часы с секундомером, линейка, а также некоторый запас небольших бытовых предметов, палок и веревок. На измерения Вы можете потратить несколько суток.

Предложите методы определения перечисленных выше величин и постарайтесь оценить их возможную точность.

Решение (20 баллов):

Возможные методы решения задачи достаточно разнообразны, так что участники могут выбирать разные способы получения искомых величин. Естественно, при этом предложенные методы реализуемы и обеспечивают более-менее приемлемую точность, они будут засчитаны. Мы изложим только некоторые из возможных вариантов действий.

Определение продолжительности суток и года. Продолжительность «солнечных» суток измеряется как интервал времени между двумя последовательными верхними кульминациями «Солнца». Для определения момента кульминации можно, воткнув в землю вертикальный шест, фиксировать положение конца его тени в течение дня. Тень минимального размера будет задавать направление небесного меридиана, после чего останется лишь зафиксировать моменты прохождения «Солнца» через меридиан.

Уже найденный меридиан можно использовать и для определения продолжительности звездных суток (т.е. периода вращения планеты вокруг своей оси) — нужно измерить интервал между двумя последовательными прохождениями какой-либо одной звезды через меридиан. Если продолжительность «солнечных» суток оказалась равной T , а продолжительность звездных — S , то отношение $P = T/|S - T|$ будет равно продолжительности года в звездных сутках.

В самом деле, если планета вращается вокруг своей оси в ту же сторону, что и вокруг звезды (при этом $S < T$), то в течение года количество звездных суток будет на единицу превосходить количество «солнечных», а выражение для вычисления P можно переписать как

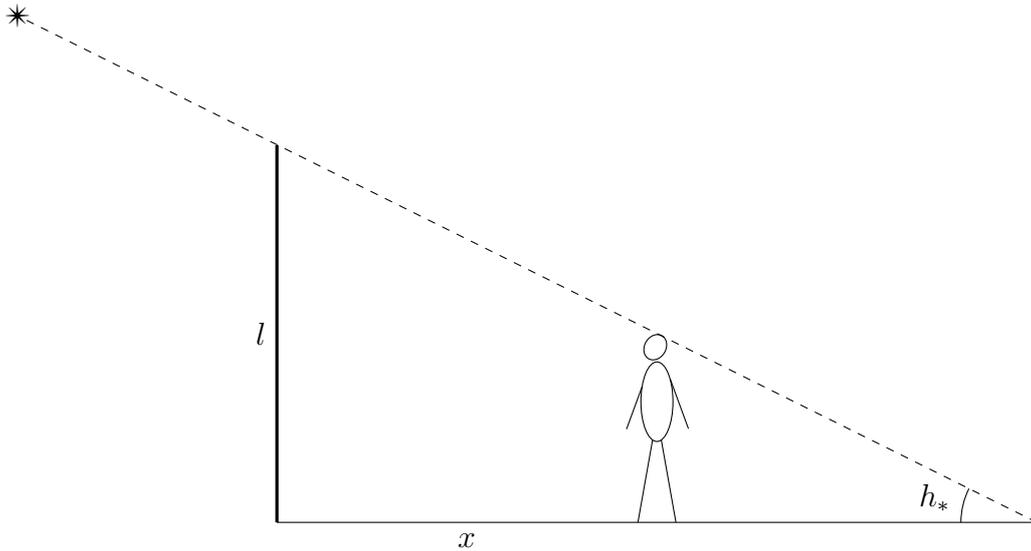
$$\frac{1}{P \cdot S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{S},$$

«солнечные» сутки при этом являются синодическим периодом, возникающим из двух реальных периодов — вращения планеты вокруг оси S и обращения вокруг звезды $P \cdot S$. Если же направления осевого вращения планеты и обращения вокруг звезды разные, то ход рассуждений остается тем же, но $S > T$, поэтому в правой части выражения для синодического периода T и S поменяются местами.

Промежуточные случаи, когда планета вращается «лежа на боку», как Уран в Солнечной системе, можно не рассматривать — по условию угол наклона плоскости экватора планеты к плоскости ее орбиты вокруг звезды не превышает 45° .

Определение широты места. Основой всех методов измерения широты является оценка высоты полюса мира над горизонтом, которая совпадает с широтой места наблюдения. Если более половины суток занимает ночь, то можно найти какую-либо звезду, которая наблюдается как в верхней, так и в нижней кульминации, тогда посередине между положениями двух кульминаций будет находиться полюс мира. Лучше, если звезда будет иметь обе кульминации с одной стороны от зенита (подходящие объекты легко выбрать, найдя в течение дня направление на полуденное положение «Солнца»).

Высоты звезды в кульминации можно измерить, воспользовавшись уже имеющимся шестом (лучше, если он будет выше роста человека) и найдя расстояние, с которого наблюдатель будет видеть звезду в точности на конце шеста. Тогда, зная высоту шеста l и высоту наблюдателя h , а также расстояние от шеста до наблюдателя x , мы можем вычислить высоту звезды над горизонтом h_* .



Из рисунка видно, что

$$\frac{l}{\frac{h}{\operatorname{tg} h_*} + x} = \operatorname{tg} h_*,$$

откуда

$$\operatorname{tg} h_* = \frac{l - h}{x}.$$

«Инструмент» получается простым в использовании, в темноте придется фиксировать только положение наблюдателя относительно шеста, что можно делать с помощью каких-нибудь колышков, втыкаемых в землю там, где наблюдатель находился при наблюдении звезды.

Если подобрать звезду, у которой можно наблюдать две кульминации сразу, не удастся, то задача станет несколько сложнее. Однако можно в течение ночи несколько раз определить высоты и азимуты (по отношению к какому-либо выделенному направлению) нескольких околополюсных звезд, а затем, нарисовав соответствующие участки их суточных траекторий, найти центр, относительно которого они движутся. В принципе, оба метода можно сочетать, усредняя результаты, итоговая точность только возрастет.

Определение радиуса планеты. Классический метод решения этой задачи предполагает оценку понижения горизонта на разных высотах над поверхностью планеты. Этот метод разработал

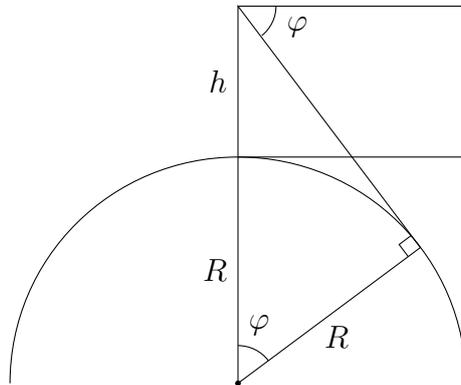
в начале XI века Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед Аль-Бируни, подробное изложение метода Вы можете найти в решении задачи практического тура 9 класса XIX Санкт-Петербургской астрономической олимпиады, состоявшегося 11 марта 2012 года.

Однако в рассматриваемом нами сейчас случае ситуация несколько отличается. Место высадки находится на ровном пространстве, возвышенностей по условию близости не имеется (и нет оснований считать, что за имеющиеся несколько дней до них удастся добраться), а имеющихся материальных запасов, по-видимому, не настолько много, чтобы построить достаточно высокую гору непосредственно из них. Зато в нашем распоряжении имеется то, чего не было у Аль-Бируни — точные часы. Поэтому мы будем действовать так.

Во время заката «Солнца» наблюдатель ложится на землю и фиксирует время, когда верхний край диска звезды касается горизонта (можно использовать и нижний край, но верхний удобнее — не так слепит глаза). Заодно фиксируется и направление, в котором наблюдался в этот момент верхний край диска.

Затем наблюдатель встает на ноги и повторяет ту же процедуру, но уже в вертикальном положении. В результате мы знаем время, которое прошло между закатами на высотах, различающихся ростом наблюдателя (который мы уже измерили ранее) и разницу азимутов захода.

Если разница азимутов окажется небольшой (что означает, что мы попали не в полярную зону планеты), ей можно просто пренебречь. Тогда, измерив разность моментов захода ΔT и зная продолжительность солнечных суток T , мы фактически определили понижение горизонта $\varphi = \frac{\Delta T}{T} \cdot 2\pi$ (в радианах) с высоты наблюдателя h .



Из рисунка видно, что

$$\cos \varphi = \frac{R}{R+h} = \frac{R+h-h}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R}.$$

В принципе, для вычисления радиуса планеты R этого достаточно, но если среди «бытовых предметов» нет калькулятора, то стоит упростить себе жизнь, вспомнив, что косинус малого угла, выраженного в радианах, можно представить как

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

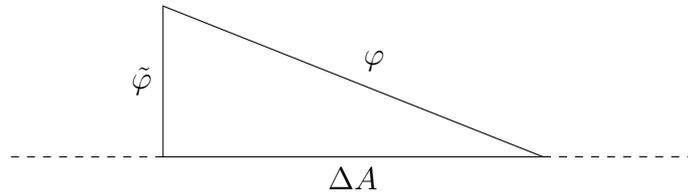
Отсюда

$$\frac{\varphi^2}{2} \approx \frac{h}{R}$$

и окончательно получаем

$$R = \frac{2h}{\varphi^2}.$$

Если же ситуация более сложная и азимуты точек заходов существенно различаются, то «Солнце» заходило за горизонт не под прямым углом к горизонту, и измеренное нами время фактически соответствует большему понижению горизонта, чем есть на самом деле (а вычисленный радиус планеты окажется заниженным). Чтобы это учесть, нарисуем еще один чертеж:



Это траектория верхнего края диска «Солнца» по отношению к горизонту. Тут ΔA — измеренная нами разность азимутов, φ — полученное по разности времен неправильное «понижение горизонта», $\tilde{\varphi}$ — настоящее понижение горизонта. Очевидно, что $\tilde{\varphi} = \sqrt{\varphi^2 - \Delta A^2}$, после чего в итоговую формулу для радиуса нужно будет подставлять $\tilde{\varphi}$ вместо φ .

Определение массы планеты. В первую очередь следует определить ускорение свободного падения. Самый эффективный способ сделать — соорудить математический маятник (вернее, его подобие) с известной длиной l и измерить его период

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда можно вычислить g . Затем, зная радиус планеты и ускорение свободного падения, можно найти массу:

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Соображения об оценках погрешностей. Грубо прикинуть погрешность результатов можно, оценив возможную точность производимых измерений. Например, все измерения углов заведомо проводятся с точностью, не превышающей угловое разрешение человеческого глаза ($1' \div 2'$), а все расстояния измеряются с погрешностью как минимум в 1 мм. Тогда, взяв в качестве средних значений что-то характерное, например, для Земли, можно посмотреть, как будут изменяться результаты при изменении параметров на характерную величину ошибки.

Еще один способ — привлечение исторических сведений. Многие параметры Земли определялись подобными методами, соответственно, можно просто вспомнить, с какой точностью это делалось при использовании аналогичных инструментов.