XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

11 класс

1. Работавший в России австрийский астроном Й. фон Литтров предлагал для связи с марсианами выкопать в Сахаре каналы, заполнить их смесью воды с керосином и поджечь. Допустим, таким образом «написаны» буквы размером 500 км каждая. Оцените минимально необходимый диаметр объектива телескопа, угловое разрешение которого достаточно для того, чтобы прочитать такой текст с Марса.

Решение (8 баллов):

Как известно, большая полуось орбиты Марса составляет около 1.5 а.е. Соответственно, минимальное расстояние между Землей и Марсом составит около 0.5 а.е. (если пренебречь эксцентриситетом орбиты Марса), однако в этот момент наблюдатели с Марса будут видеть Землю рядом с Солнцем, что явно затруднит наблюдения. Поэтому для оценки будем считать, что расстояние, с которого марсиане наблюдают Землю, равно $r = 1$ а.е. (или $1.5 \cdot 10^{11}$ м).

Для того, чтобы прочитать текст, необходимо различать буквы. Как следствие, телескоп должен обеспечивать возможность разрешать не буквы целиком, а части букв. Соответствующую оценку можно получить многими способами (например, вспомнив разрешение какого-либо экрана в пикселях и прикинув количество читаемых букв, которые при этом могут поместиться в одной строке), для определенности будем считать, что угловое разрешение телескопа должно позволить увидеть детали, линейный размер которых равен 1/10 размера буквы, т.е. $l = 50$ км.

Тогда угловой размер детали в радианах равен $\beta = l/r$ и он же примерно равен $\beta \approx \lambda/D$, где λ — длина волны наблюдения (для оптического диапазона это примерно $5 \cdot 10^{-7}$ м), а D — искомый диаметр объектива телескопа. Отсюда

$$\frac{l}{r} = \frac{\lambda}{D}$$

и, подставляя числа, получаем $D = 1.5$ м.

2. Предположим, что в результате катастрофы Солнце мгновенно сжалось настолько, что период его осевого вращения стал равен 3 секундам. Оцените среднюю температуру Солнца сразу после катаклизма. Считайте, что теплопотери во время сжатия и взаимодействие с какими-либо другими телами отсутствовало.

Решение (8 баллов):

Для начала найдем новый радиус Солнца. По закону сохранения момента импульса произведение момента инерции I на угловую скорость ω постоянно, т.е.

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

(здесь и далее величины с индексом «0» относятся к начальному (т.е. реальному) состоянию Солнца, а величины без индекса — к тому, что получилось в результате катаклизма).

Считая, что вид распределения плотности с радиусом в Солнце существенно не изменился, можно считать, что момент инерции пропорционален квадрату радиуса, $I \propto R^2$. Тогда, поскольку угловая скорость вращения обратно пропорциональна периоду, $\omega \propto 1/P$, получаем, что $R \propto \sqrt{P}$. Современный период вращения Солнца P_0 — примерно месяц, для удобства воспользуемся оценкой $P_0 = 3 \cdot 10^6$ с. Тогда в результате катаклизма радиус Солнца должен уменьшиться на три порядка и составить около 10^3 км (реальное значение $R_0 = 7 \cdot 10^5$ км).

Поскольку Солнце при катаклизме не обменивалось энергией с окружающей средой, сумма механической и тепловой (U) энергий должна была сохраниться. Механическая энергия состоит из кинетической энергии вращения W и гравитационной потенциальной энергии Φ. Оценим соответствующие величины, зная, что масса Солнца $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг (здесь и далее все вычисления проводятся в единицах СИ).

Начальная гравитационная потенциальная энергия

$$\Phi_0 \sim -\frac{G\mathfrak{M}_\odot{}^2}{R_0} = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^{41} \text{ Дж.}$$

Начальная кинетическая энергия вращения

$$W_0 = \frac{I_0 \omega_0^2}{2} \sim \frac{\mathfrak{M}_\odot R_0^2 \cdot 4\pi^2}{P_0^2} = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot (7 \cdot 10^8)^2 \cdot 40}{(3 \cdot 10^6)^2} = 4 \cdot 10^{36} \text{ Дж.}$$

Поскольку, например, из теоремы вириала известно, что сумма внутренней энергии и кинетической энергии вращения по порядку величины совпадает с модулем гравитационной потенциальной энергии, то $U_0 \sim -\Phi_0$, а энергией вращения W_0 можно пренебречь.

После сжатия гравитационная потенциальная энергия (обратно пропорциональная радиусу) возрастет в 10^3 раз, т.е. $\Phi = \Phi_0 \cdot 10^3$. Поскольку кинетическая энергия вращения $W \propto R^2/P^2$ и, как уже получено выше, $P \propto R^2$, получаем, что $W \propto R^{-2}$, т.е. кинетическая энергия вращения возрастет в 10^6 раз.

Однако и после катаклизма кинетическая энергия вращения окажется на два порядка меньше, чем гравитационная потенциальная энергия, откуда можно сделать вывод, что энергия вращения практически не влияет на оценку итоговой внутренней энергии.

Заметим также, что изменение внутренней энергии при этом должно совпасть с модулем изменения гравитационной потенциальной энергии, но поскольку начальное значение Φ_0 на три порядка меньше Φ, можно сказать, что и $U \sim -\Phi$.

Осталось оценить среднюю температуру T. Поскольку $U \approx \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mu}\mathfrak{R}T$, где μ — молярная масса вещества Солнца ($\mu \sim 10^{-3}$ кг/моль), $\mathfrak{R}$ — универсальная газовая постоянная, получаем

$$T \sim \frac{4 \cdot 10^{41} \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{30} \cdot 8} \sim 10^{10} \text{ К.}$$

3. При обработке данных о регистрации нейтрино от вспышки сверхновой в Большом Магеллановом облаке (БМО) 23.02.1987 возникло предположение, что нейтрино «опоздали» на 50 минут от ожидаемого момента из-за того, что скорость движения нейтрино была чуть меньше скорости света в вакууме. Оцените в рамках этого предположения массу нейтрино, если известно, что энергия каждого из зарегистрированных нейтрино составляла около 10^{-12} Дж. Расстояние до БМО — 50 кпк.

Решение (8 баллов):

Известно, что полная энергия частицы массы m, движущейся со скоростью v, равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где c — скорость света в вакууме. Следовательно, для получения ответа необходимо найти скорость v.

Заметим, однако, что прямолинейная попытка сделать это приведет к неудаче: очевидно, что v практически совпадает со скоростью света, и расчет непосредственно по исходной формуле с требуемой точностью без калькулятора невозможен.

Преобразуем коэффициент в исходной формуле:

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^3}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{c^3}{\sqrt{(c-v)\,(c+v)}} \approx \frac{c^3}{\sqrt{(c-v)\cdot 2c}} = \frac{c^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{c}}}$$

Теперь учтем, что если нейтрино преодолели расстояние от БМО до нас за время t, то это расстояние равно $c(t-\Delta t) = vt$, где Δt — время, на которое «опоздали» нейтрино. Отсюда

$$\frac{v}{c} = \frac{t-\Delta t}{t} = 1 - \frac{\Delta t}{t},$$

поэтому

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{\Delta t}{t}.$$

Таким образом,

$$m = \frac{\sqrt{2}E}{c^2}\sqrt{\frac{\Delta t}{t}}.$$

БМО находится на расстоянии 50 кпк, что соответствует примерно 160 тыс. световых лет. Так как в году примерно $3\cdot 10^7$ секунд, получаем, что $t \approx 5\cdot 10^{12}$ секунд. $\Delta t = 3\cdot 10^3$ секунд, поэтому

$$m = \frac{1.4\cdot 10^{-12}}{(3\cdot 10^8)^2}\sqrt{\frac{3\cdot 10^3}{5\cdot 10^{12}}} = 4\cdot 10^{-34}\ \text{кг}.$$

Отметим, что предположение оказалось неверным: полученная нами оценка на три порядка превышает современную верхнюю оценку массы нейтрино.

4. При вспышке сверхновой SN1987A выделилась энергия 10^{46} Дж. Оцените массу звезды, которая излучит столько же энергии за всю свою жизнь на стадии Главной последовательности.

Решение (8 баллов):

В звездах Главной последовательности происходит синтез гелия из водорода. Если предположить, что в гелий превращается в среднем примерно одна и та же доля массы исходной звезды (что близко к действительности), а также что при синтезе гелия из водорода в энергию переходит определенная доля массы «топлива» (что верно с весьма высокой точностью), то это означает, что за все время жизни на Главной последовательности звезда массы $\mathfrak{M}$ вырабатывает $\alpha\,\mathfrak{M}c^2$ энергии, где c — скорость света, α — некоторый постоянный для звезд разных масс коэффициент.

Поскольку светимость звезды на стадии Главной последовательности меняется достаточно слабо, то, зная светимость Солнца $L_\odot = 4\cdot 10^{26}$ Вт и его массу $\mathfrak{M}_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг, а также время его жизни $\tau_\odot \approx 10^{10}$ лет $= 3\cdot 10^{17}$ секунд, можно определить величину коэффициента α из соотношения

$$L_\odot\,\tau_\odot = \alpha\,\mathfrak{M}_\odot c^2.$$

Тогда полная высветившаяся звездой массы $\mathfrak{M}$ энергия

$$E = \alpha\,\mathfrak{M}c^2 = L_\odot\,\tau_\odot\,\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot},$$

откуда легко выражается масса звезды в массах Солнца:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} = \frac{E}{L_\odot\, \tau_\odot} = \frac{10^{46}}{4 \cdot 10^{26} \cdot 3 \cdot 10^{17}} \approx 80.$$

5. «Так стояли Эльвэ и Мелиан, а вращающийся над ними звездный небосвод отсчитывал долгие годы. И деревья Нан Эльмота стали выше и темнее, прежде чем Мелиан и Эльвэ произнесли хоть одно слово».

Предположим, что они стояли в центре поляны диаметром 30 м, скорость роста деревьев Нан Эльмота составляла 0.5 м/год, а в момент встречи высота деревьев не превышала 15 м. Через какое время количество света звезд (вроде бы Солнце и Луна тогда еще не были созданы), достигающее поляны, уменьшится вдвое? Можно считать, что звезды равномерно распределены по небесной сфере Арды.

Решение (8 баллов):

Необходимо понять, как будет меняться площадь видимой части небесной сферы. Площадь сферического сегмента составляет $2\pi R^2(1-\cos\theta)$, где R — радиус сферы, θ — угол между радиус-векторами сферы, проведенными к точке на основании сегмента и к вершине сегмента. В данном случае угол θ равен углу между направлением из центра поляны на вершины деревьев и зенит, $\operatorname{tg}\theta(t) = D\big/2H(t)$, где рост деревьев $H(t) = H_0 + \Delta H \cdot t$.

Пусть θ_0 — угол между горизонтом и направлением на вершины деревьев в момент встречи. Определим, через какое время площадь сегмента уменьшится вдвое:

$$\frac{2\pi R^2(1-\cos\theta_0)}{2\pi R^2\big(1-\cos\theta(t)\big)} = 2,$$

$$1-\cos\theta_0 = 2 - 2\cos\theta(t),$$

$$\cos\theta(t) = \frac{1+\cos\theta_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+D^2/4H_0^2}} \approx 0.85.$$

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)} - 1} \approx 0.62, \quad H(t) = \frac{D}{2\operatorname{tg}\theta(t)} = 24 \text{ м}, \quad t = \frac{H-H_0}{\Delta H} = 18 \text{ лет}.$$