XXIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2016

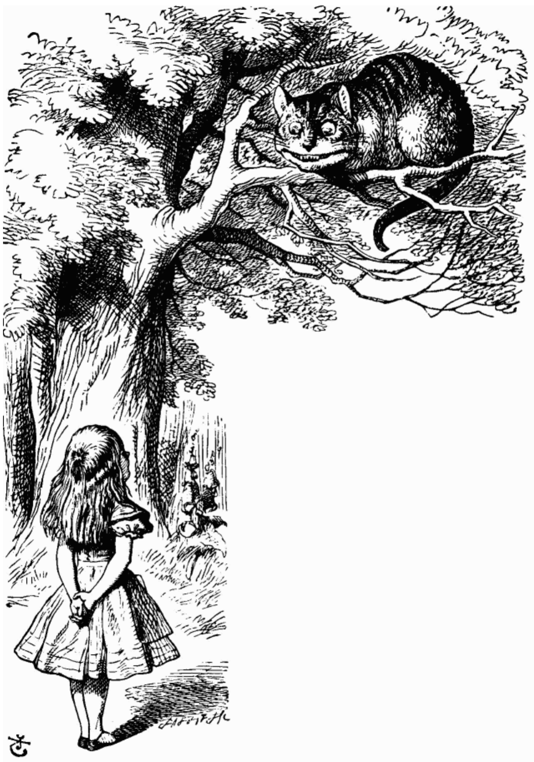
14 февраля

9 класс

1. В сказке Льюиса Кэролла у Алисы, попавшей в Страну чудес, постоянно менялся рост. На сколько изменялась максимальная видимая звездная величина объектов, доступных Алисе для наблюдений невооруженным глазом, если ее рост менялся от 5 см до 5 м?

Решение (8 баллов):

Многочисленные источники (иллюстрации, вроде приведенной ниже, фильмы и т.д.) свидетельствуют, что Алиса изменялась в размерах с сохранением пропорций.



Поскольку рост Алисы изменялся в 100 раз, отсюда следует, что и диаметр ее зрачков также изменялся в 100 раз, а площадь — в 10^4 раз. При наблюдении точечных источников излучения (которыми с хорошей точностью можно считать звезды) максимальная звездная величина доступных для наблюдений объектов (именуемая проницающей способностью) определяется площадью входного отверстия телескопа, зрачка глаза и т.п., поэтому можно считать, что самые слабые звезды, которые могла видеть Алиса наибольшего размера, создавали освещенность в 10^4 раз меньшую, чем самые слабые звезды, которые видела наименьшая Алиса.

Известно, что изменение освещенности на два порядка соответствует изменению видимой звездной величины на 5^m. В данном случае освещенность менялась на четыре порядка, поэтому изменение проницающей способности Алисы составило 10^m.

2. При изучении астероидов Главного пояса было замечено, что они в основном расположены в области $\pm 4^\circ$ от эклиптики, а границы пояса определяются зонами, в которых отношение периода обращения Юпитера вокруг Солнца к периоду обращения астероида составляет $3:1$ и $3:2$. Считая, что общее количество астероидов — примерно 300 тысяч, оцените среднее расстояние между двумя соседними астероидами.

Решение (8 баллов):

Периоды обращения астероидов, находящихся на границах зоны, вычисляются легко: это 4 года и 8 лет. Из этого по III закону Кеплера $T^2 = a^3$ (где периоды выражены в годах, а большие полуоси — в астрономических единицах) получаем границы зоны в а.е.: 2.5 и 4 соответственно. Итого имеем приблизительно цилиндрический пояс от 2.5 до 4 а.е. в плоскости эклиптики и толщиной в 8°. Серединой пояса можно считать примерно 3 а.е., тогда толщина его $3 \cdot 8^\circ/57^\circ \approx 0.4$ а.е. (поскольку в одном радиане примерно 57°). Вычисляем объем «шайбы»: $\pi(a_1^2 - a_2^2)h \approx 12$ а.е.^{3}. Следовательно, на каждый астероид в среднем приходится объем $12/(3\cdot 10^5) = 4\cdot 10^{-5}$ а.е.^{3}. Извлекая из этого кубический корень (для чего то же число удобнее записать в виде $40 \cdot 10^{-6}$), получаем примерно $3.5\cdot 10^{-2}$ а.е. Если перевести это расстояние в километры (что на самом деле не требуется), получится примерно 5 миллионов км.

3. Про звезду Вега известно, что она очень сильно сплюснута. Оцените отношение экваториального и полярного радиусов Веги, считая, что при наблюдении ее с разных сторон ее звездная величина изменялась бы максимум на 1^m. Считать поверхностную яркость «диска» Веги со всех сторон постоянной.

Решение (8 баллов):

Поскольку Вега сплюснута за счет осевого вращения, она является двухосным эллипсоидом вращения (или, как еще называют такие тела, сфероидом). Представив себе такое тело, можно обнаружить, что максимальным видимый диск Веги окажется при наблюдении с полюса, где его площадь составит $\pi R_{\text{экв}}^2$ ($R_{\text{экв}}$ обозначен экваториальный радиус Веги), а минимальным диск будет при наблюдении его из плоскости экватора — в этом случае «диск» окажется эллипсом с большой полуосью $R_{\text{экв}}$ и малой полуосью $R_{\text{пол}}$ (это полярный радиус Веги).

Площадь такого эллипса равна $\pi R_{\text{пол}} R_{\text{экв}}$. Этот факт может оказаться известным, но его можно и получить из следующего рассуждения. Рассмотрим круг радиуса R. Его площадь, как известно, равна πR^2. Разобьем его на много маленьких квадратиков таким образом, чтобы их суммарная площадь равнялась площади круга. Затем сплющим или растянем круг в каком-то одном направлении в k раз, выбрав направление так, чтобы оно совпадало с направлением какой-то из сторон квадратиков. При этом круг превратится в эллипс с полуосями, равными R и $k\,R$, а квадратики станут прямоугольниками, у которых одна из сторон также изменится в k раз. Поскольку сумма площадей прямоугольников по-прежнему будет равна площади эллипса, отсюда следует, что последняя окажется равной $\pi(k\,R)\,R$, что нам и требуется.

Следовательно, отношение площадей «дисков» (в кавычках или без) $k = R_{\text{экв}}/R_{\text{пол}}$. Поскольку разность звездных величин достигает 1^m, то, по определению звездной величины, $k = 2.5$.

4. Как многие помнят, первые кентавры, с которыми встретился в своей жизни Гарри Поттер, дружно посмотрели вверх на небо и сообщили, что «Марс сегодня ярок». Из описания следует, что встреча произошла майской ночью 1992 года, примерно в полночь. Докажите, что кентавры нагло врали, если известно, что в мае 2016 года видимая звездная величина Марса достигнет -2^m. Период обращения Марса вокруг Солнца составляет 1.88 лет.

Решение (8 баллов):

-2^m — это довольно много, обычно Марс существенно тусклее. Исходя из этой информации (которой, в отличие от кентавров, можно доверять) следует сделать вывод, что в мае этого года Марс действительно будет ярок, а это означает, что он будет находиться где-то в окрестности противостояния. В самом деле, блеск Марса даже во время Великих противостояний не достигает -3^m, а при обычном же противостоянии он составляет как раз около -2^m (и очередное противостояние действительно состоится 22 мая 2016 года).

Возникает вопрос, где именно находился Марс в мае 1992 года. Это можно выяснить, вычислив синодический период Марса. Как известно, синодический период (S) можно вычислить, зная сидерические периоды (T) двух тел

$$\frac{1}{S_{♂}} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{♂}},$$

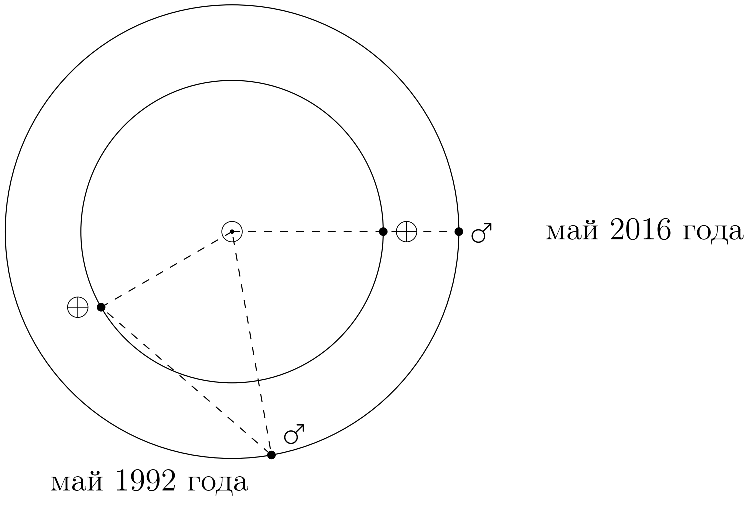
откуда

$$S_{♂} = \frac{T_{\oplus} T_{♂}}{T_{♂} - T_{\oplus}} = \frac{1.88}{1.88 - 1} \approx 2\frac{1}{7} \text{ года.}$$

Гарри Поттер встретился с кентаврами за 24 года до противостояния. За это время успело пройти $24/(15/7) = 11.2$ синодических периодов, т.е. встреча произошла за 0.2 синодического периода (или примерно за 0.4 года) до очередного противостояния. Следовательно, Марс не дошел до момента противостояния по своей орбите около $80°$, а Земля по своей — около $150°$. Таким образом, если смотреть на обе планеты с Солнца, то угловое расстояние между Землей и Марсом в момент встречи с кентаврами составляет около $70°$.

Тот же результат можно получить и более простым способом. Поскольку оба интересующих нас события произошли в мае, можно считать, что Земля находилась примерно в одной и той же точке своей орбиты. Тогда Марс успел совершить $24/1.88 \approx 12\frac{3}{4}$ оборота вокруг Солнца и, следовательно, не дошел до направления с Солнца, в котором Земля находится в мае, около четверти орбиты.

Дальнейшие рассуждения можно вести многими разными способами. Можно нарисовать рисунок в масштабе (вспомнив или вычислив, что большая полуось орбиты Марса составляет около 1.5 а.е.) и померить расстояние от Земли до Марса, можно применить теорему косинусов. Но еще проще заметить, что в треугольнике, угол которого близок к $60°$, а две прилегающих стороны сравнимы друг с другом по величине, третья сторона (расстояние от Земли до Марса) также должна быть примерно равна двум остальным, т.е. Марс будет находиться от Земли на существенно большем расстоянии, чем во время противостояния, и ярким оказаться не может (действительно, в момент встречи его звездная величина составляла около $+1^m$), и кентавры действительно наврали.



Но кентавры, воспользовавшись невежеством Гарри Поттера в астрономии, этим не ограничились. Поскольку встреча с кентаврами произошла перед очередным противостоянием, Земля догоняла Марс в своем движении по орбите. Так как направление осевого вращения Земли совпадает с направлением ее обращения вокруг Солнца, Марс должен был восходить на небе перед восходом Солнца и, поскольку угол между направлением на Марс и на Солнце, как мы уже обнаружили, тоже составлял примерно $60°$, Марс можно было увидеть на небе во второй половине ночи. В районе полуночи он либо еще будет под горизонтом (что в действительности и случилось), либо окажется на очень небольшой высоте над ним, так что, посмотрев вверх, увидеть Марс, неважно, яркий или неяркий, было просто невозможно.

5. В планетной системе EPIC 201367065 вокруг центральной звезды радиуса $R_\star = 0.56 R_\odot$ и массы $0.6\mathfrak{M}_\odot$ вращаются три планеты, радиусы которых равны $r_1 = 0.0348 R_\star$, $r_2 = 0.0279 R_\star$, $r_3 = 0.0248 R_\star$, а радиусы орбит равны $a_1 = 0.078$ а.е., $a_2 = 0.14$ а.е., $a_3 = 0.21$ а.е. соответственно. Для гипотетических обитателей какой из планет — второй или третьей — прохождение ближайшей к ней внутренней планеты по диску звезды будет длиться дольше? Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости, все три планеты вращаются вокруг звезды в одном направлении.

Решение (8 баллов):

Вначале определим период обращения каждой из планет вокруг звезды. Воспользуемся третьим законом Кеплера в системе единиц, в которой время измеряется в годах, массы — в массах Солнца, расстояния — в астрономических единицах:

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{1}{M_\star}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При подстановке в данную формулу численных данных значения периодов получаются равными $T_1 \approx 0.028$ г., $T_2 \approx 0.068$ г., $T_3 \approx 0.12$ г. Далее воспользуемся формулой определения синодического периода для соседних планет:

$$\frac{1}{S_i} = \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{i+1}}, \quad i = 1, 2,$$

где внутренняя планета имеет период T_i, внешняя — T_{i+1}. После подстановки периодов для соседних планет получим $S_1 = 0.048$ г., $S_2 = 0.15$ г.

Рассмотрим подробно прохождение внутренней планеты (с номером i) по диску звезды. Внутренняя планета должна пройти угловое расстояние β_i, равное сумме углового размера диска звезды $2 \cdot \rho_{\star,i+1}$ и удвоенного углового радиуса ρ_i внутренней планеты при наблюдении с внешней планеты: $\beta_i = 2\rho_{\star,i+1} + 2\rho_i$, причем формулы для вычислений угловых радиусов объектов имеют вид

$$\rho_{\star,i+1} \approx \frac{R_\star}{a_{i+1}} \quad \text{и} \quad \rho_i \approx \frac{r_i}{a_{i+1} - a_i}.$$

Данный угол β_i соответствует углу α_i, проходимому i-й планетой по ее орбите:

$$\operatorname{tg} \alpha_i \cdot a_i \approx \operatorname{tg} \beta_i \cdot (a_{i+1} - a_i).$$

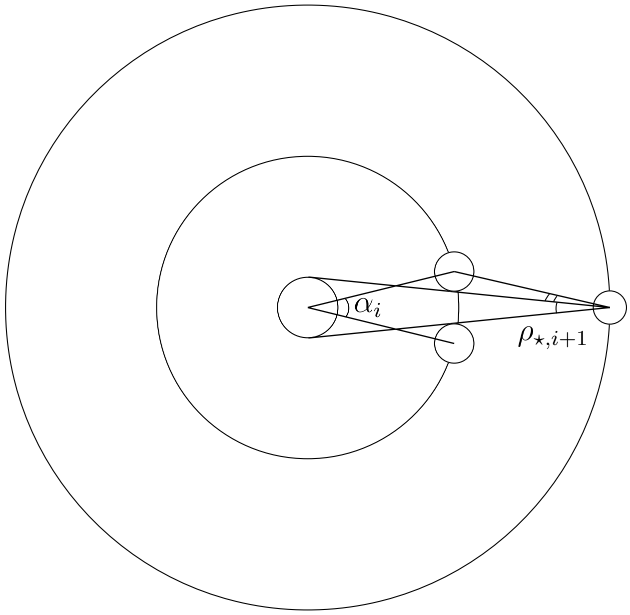
В случае малых углов формулу можно записать в виде

$$\alpha_i \approx \beta_i \cdot \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i}.$$

Далее длительность прохождения определяется как

$$\tau_i = \frac{\alpha_i}{2\pi} \cdot S_i.$$

После подстановки численных данных приблизительные значения длительности прохождений составляют $\tau_1 \approx 7{\cdot}10^3$ с для наблюдения прохождения первой планеты и $\tau_2 \approx 9{\cdot}10^3$ с для наблюдения прохождения второй планеты.



Однако вышеизложенное решение обладает двумя серьезными недостатками: во-первых, оно вселяет ужас и желание найти калькулятор (которого по правилам игры нет в наличии), во-вторых, оно позволяет получить много лишней информации. В самом деле, нам не требуется найти времена прохождений, достаточно лишь узнать, какое из времен будет больше.

Поэтому поступим иначе. Не будем ничего вычислять в процессе решения и выпишем общую формулу для τ_i, подставив в нее почти все промежуточные выражения. У нас получится следующее:

$$\tau_i = \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_\star}{a_{i+1}} + \frac{r_i}{a_{i+1} - a_i}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{i+1}}} \cdot \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i}.$$

Очевидно, что соотношение между τ_1 и τ_2 никак не изменится, если мы выкинем множитель $1/\pi$. Совершенно неважно, в каких единицах вычислять a_i и a_{i+1} в последней дроби — какими бы единицы не были, это некоторая безразмерная величина. Периоды также могут быть выражены в любой (лишь бы одинаковой) единице — получающийся синодический период будет выражен в ней же, это поменяет численное значение времен прохождений, но не ответ на вопрос, какое из них больше. Аналогично обстоят дела с величинами в скобках — требуется лишь, чтобы оба числителя (отдельно) и оба знаменателя (также отдельно) были выражены в каких-то общих единицах.

Как только мы осознаем этот факт, вычисления можно будет существенно упростить. В самом деле, легко заметить, что $a_1 : a_2 : a_3 = 11 : 20 : 30$. Масса звезды является ненужным данным, поскольку теперь мы можем считать, что $T_i = a_i^{3/2}$. Отсюда $T_1 : T_2 : T_3 = 36 : 90 : 160 \approx 2 : 5 : 9$ (что это за единицы, сказать сложно, но нам это совершенно неважно). Отсюда с некоторым небольшим округлением можно найти соотношение между синодическими периодами: $S_1 : S_2 = 3 : 11$.

Осталось расправиться со скобкой. Тут, правда, можно ничего специально не делать, поскольку r_i уже даны в подходящих единицах. И тогда

$$\tau_1 = \left(\frac{1}{20} + \frac{0.035}{9}\right) \cdot 3 \cdot \frac{9}{11},$$

$$\tau_2 = \left(\frac{1}{30} + \frac{0.028}{10}\right) \cdot 11 \cdot \frac{10}{20},$$

Найдем отношение:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{(0.033 + 0.003) \cdot 11/2}{(0.05 + 0.004) \cdot 3 \cdot 9/11} = \frac{0.036 \cdot 11^2}{0.054 \cdot 54} = \frac{36 \cdot 11^2}{54 \cdot 54} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 11^2}{9 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6} = \left(\frac{11}{9}\right)^2.$$

Вычислять последнее значение уже не нужно. Достаточно сказать, что оно явно больше единицы, и, следовательно, ответ получен, второе прохождение длится дольше.