XXIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2016

14 февраля

11 класс

1. Наблюдатель, находящийся в северном полушарии, наблюдал восход Солнца в 9^h04^m по местному времени. На следующий день Солнце оказалось на горизонте ровно в 9^h00^m. Определите дату наблюдения. Во сколько и на какой высоте произойдет ближайшая верхняя кульминация Капеллы ($\alpha = 5^h17^m$, $\delta = +46^\circ$)? Угловыми размерами Солнца и уравнением времени пренебречь.

Решение (8 баллов):

Заметим, что между восходами Солнца прошло ровно 23 часа 56 минут, т.е. одни звездные сутки. Через этот промежуток времени эклиптика заняла то же положение относительно горизонта, что и в момент первого восхода. Таким образом, мы видим, что у двух больших кругов небесной сферы, у эклиптики и горизонта, есть две общие точки (положения Солнца в моменты восходов), которые не совпадают и не являются диаметрально противоположными. Это возможно только в том случае, если оба этих круга совпадают.

В момент, когда эклиптика совпадает с горизонтом, в верхней кульминации в зените находится Северный полюс эклиптики ($\alpha = 18^h$, $\delta = +66^\circ.5$). Таким образом, дело происходит на Северном полярном круге ($\varphi = +66^\circ.5$), а звездное время в момент восхода равно 18^h. Через 3 часа, в 12^h по местному солнечному времени, в верхней кульминации окажется Солнце. Звездное время при этом составит $18^h + 3^h = 21^h$. Таким образом, прямое восхождение Солнца в день наблюдения равно 21^h.

Известно, что в День весеннего равноденствия, 21 марта, прямое восхождение Солнца равно нулю, и в течение года изменяется примерно на $1^\circ = 4$ минуты в сутки. Значит, дата наблюдения отстоит от 21 марта примерно на $3 \cdot 60/4 = 45$ дней, т.е. получаем 4 февраля.

Ближайшая кульминация Капеллы произойдет на высоте

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = 69^\circ.5$$

в

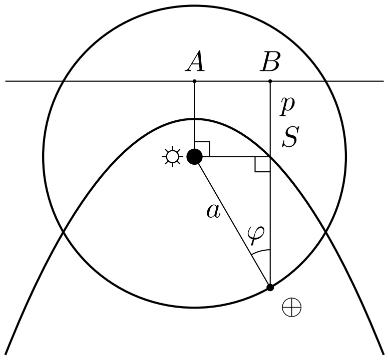
$$(12^h + \alpha - 21^h) + 24^h = 20^h\ 17^m$$

по местному времени.

2. В будущем астрономы обнаружили объект в Солнечной системе, орбита которого лежала в плоскости эклиптики. В момент, когда одновременно углы «перигелий орбиты объекта – Солнце – объект» и «Солнце – объект – Земля» стали прямыми, ученые зарегистрировали внезапный рост блеска объекта. Считая, что на самом деле это была металлическая летающая тарелка, плоскость которой перпендикулярна плоскости ее орбиты, а ребро повернуто по направлению движения, найдите эксцентриситет орбиты объекта и перигелийное расстояние объекта, если известно, что его угловое расстояние от Солнца в момент наблюдения составляло 30°.

Решение (8 баллов):

Согласно условию, плоскость летающей тарелки по сути является касательной плоскостью к поверхности вращения, образованной ее орбитой. Так как она сделана из металла, с оптической точки зрения она будет вести себя точно также, как элемент зеркала, выполненного в форме этой самой поверхности. Изобразим ситуацию на рисунке:



Можно предположить, что скачок блеска, замеченный учеными, связан с тем, что геометрия орбиты заставила солнечный свет отразиться в направлении Земли именно в такой конфигурации, а то, что тарелка наблюдалась и ранее, связано лишь с несовершенством зеркала — оно не только отражает, но и рассеивает свет. Заметим, что орбита является некоторой кривой второго порядка, при этом в таком случае она удовлетворяет оптическому свойству параболы, значит ничем иным она быть не может. Таким образом, эксцентриситет орбиты равен единице.

Пусть прямая AB — директриса параболы. Заметим, что $BS = S☼ = p$ согласно определению параболы, а значит $ABS☼$ — квадрат. Известно что перигелий — вершина параболы — делит отрезок $A☼$ пополам. Значит, перигелийное расстояние

$$\rho = \frac{p}{2} = \frac{S☼}{2} = \frac{a\sin\varphi}{2} = \frac{a\sin 30^\circ}{2} = \frac{a}{4} = 0.25 \text{ а.е.},$$

где $a = 1$ а.е., а $\varphi = 30^\circ$.

Строго говоря, возможна еще одна картинка — такая, на которой перигелий по ту же сторону от Солнца, что и Земля. Однако внутренние части всех кривых второго порядка являются выпуклыми множествами, поэтому они никогда не будут отражать свет вовне.

3. Двойной пульсар PSR B1913+16 состоит из двух нейтронных звезд с примерно одинаковыми массами, равными 1.4 масс Солнца, среднее расстояние между которыми равно $2 \cdot 10^6$ км. Известно, что в результате излучения системой гравитационных волн орбитальный период системы уменьшается на 80 микросекунд за год. Оцените отношение гравитационной светимости PSR B1913+16 к его светимости в оптическом диапазоне, если известно, что он находится на расстоянии 7 кпк от Солнца и в оптическом диапазоне его блеск равен $+22^m$.

Решение (8 баллов):

У двойной системы, орбитальный период которой изменяется, должна изменяться также и полная механическая энергия, причем потеря энергии за единицу времени должна совпадать с гравитационной светимостью системы.

Поскольку нас интересует только оценка, будем считать, что для вычисления механической энергии системы можно воспользоваться классической механикой. Тогда можно действовать двумя различными путями.

Во-первых, для орбитального периода P, среднего расстояния между звездами a (оно же — большая полуось системы) и массы одной звезды $\mathfrak{M}$ можно записать III закон Кеплера

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{2G\mathfrak{M}}$$

и, сделав упрощающее предположение, что орбиты звезд круговые, выразить скорость каждой звезды как

$$v = \frac{\pi a}{P}.$$

Тогда полная механическая энергия системы

$$E = 2 \cdot \frac{\mathfrak{M}v^2}{2} - \frac{G\mathfrak{M}^2}{a} = \frac{\mathfrak{M}\pi^2 a^2}{P^2} - \frac{G\mathfrak{M}^2}{a} = \frac{\mathfrak{M}\pi^2 2G\mathfrak{M}}{4\pi^2 a} - \frac{G\mathfrak{M}^2}{a} = -\frac{1}{2}\,\frac{G\mathfrak{M}^2}{a}.$$

Во-вторых, можно вспомнить о существовании теоремы вириала, из которой следует, что полная механическая энергия системы равна половине ее средней потенциальной энергии, после чего итоговое выражение для E можно записать сразу, без промежуточных выкладок.

Дальнейшее решение излагается в предположении (по-видимому, вполне справедливом), что все участники тура умеют дифференцировать, однако задачу можно решить и без использования производных, рассматривая изменения величин на интервале времени, равном, например, одному году.

Из сказанного выше следует, что гравитационная светимость $L = \frac{dE}{dt}$. Тогда

$$L = \frac{1}{2}\,\frac{G\mathfrak{M}^2}{a^2}\,\frac{da}{dt}.$$

В условии задачи не дано изменение большой полуоси системы со временем, но приводятся данные об изменении периода, поэтому надо найти связь между ними. Проще всего сделать это следующим образом.

Известно, что $P^2 \propto a^3$ (конкретный коэффициент пропорциональности нас сейчас не интересует, существенно лишь то, что он постоянен). Тогда $2P\,dP \propto 3a^2\,da$ с тем же коэффициентом пропорциональности, а тогда

$$2\frac{dP}{P} = 3\frac{da}{a}.$$

Поэтому гравитационная светимость системы

$$L = \frac{1}{2}\,\frac{G\mathfrak{M}^2}{a^2}\,\frac{2a}{3P}\,\frac{dP}{dt} = \frac{1}{3}\,\frac{G\mathfrak{M}^2}{a}\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dt}.$$

В получившемся выражении нам известны все значения, кроме нынешнего орбитального периода, но его можно выразить из III закона Кеплера. Сделаем это:

$$L = \frac{1}{3}\,\frac{G\mathfrak{M}^2}{a}\,\sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}}{4\pi^2 a^3}}\,\frac{dP}{dt} = \frac{1}{6\pi}\,\frac{G\mathfrak{M}^2}{a^2}\,\sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}}{a}}\,\frac{dP}{dt}.$$

Осталось аккуратно подставить числа (не забывая о том, что мы решаем оценочную задачу и одной значащей цифры нам вполне достаточно). Будем считать все в системе СИ, тогда $\mathfrak{M} = 1.4 \cdot 2 \cdot 10^{30} \approx 3 \cdot 10^{30}$ кг, $a = 2 \cdot 10^9$ м, $G = 7 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, $dP/dt = (8 \cdot 10^{-5})/(3 \cdot 10^7) = 3 \cdot 10^{-12}$ (в году примерно $3 \cdot 10^7$ секунд). Тогда L должна получиться в ваттах и будет равна

$$L = \frac{1}{2 \cdot 10^1}\,\frac{7 \cdot 10^{-11} 9 \cdot 10^{60}}{4 \cdot 10^{18}}\,\sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 10^9}} \cdot 3 \cdot 10^{-12} = 1 \cdot 10^{25} \text{ Вт}.$$

Осталось сравнить эту светимость с оптической светимостью объекта. Тут, как часто бывает, тоже возможны разные способы действий, но наиболее простой выглядит так. Вычислим абсолютную звездную величину объекта в оптическом диапазоне, пренебрегая межзвездным поглощением:

$$M_{\text{опт}} = m - 5\lg r + 5 = 22 - 5\lg(7 \cdot 10^3) + 5 = 22 - 5 \cdot (3 + \lg 7) + 5 = 12 - 5\,\lg 7.$$

Оценить десятичный логарифм 7 можно буквально «на глаз»: $\lg 3 \approx 0.5$, $\lg 10 = 1$, логарифм растет медленнее, чем линейная функция, так что должно получиться что-то вроде $\lg 7 \approx (0.8 \div 0.9)$. Тогда $M_{\text{опт}} \approx 8$.

С другой стороны, можно заметить, что гравитационная светимость объекта примерно в 40 раз меньше светимости (обычной) Солнца. Отношение светимостей в 100 раз соответствует разнице на 5^m, каждые 2.5 раза — это одна звездная величина, так что гравитационная абсолютная звездная величина нашего объекта равна $M_{\odot} + 4^m = 9^m$.

Ну а отсюда следует, что, с учетом грубости делавшихся нами вычислений, оптическая светимость двойного пульсара ненамного больше (раза в два) гравитационной светимости, а по порядку величины они попросту совпадают. Но это все же еще не ответ. Так было бы, если бы не одна существенная деталь: мы пренебрегли межзвездным поглощением света. Обозначение двойного пульсара означает, что он имеет прямое восхождение около 19^h и склонение $+16°$, а это, вкупе с расстоянием до него, означает, что он находится в центральной части Галактики. Тогда, учитывая, что поглощение составляет примерно одну звездную величину на килопарсек, получаем, что реальная разница оптической и гравитационной абсолютных звездных величин где-то $7^m \div 8^m$, что означает, что в оптическом диапазоне двойной пульсар примерно в тысячу раз ярче.

4. Согласно «Сильмариллиону», эльфы появились в Средиземье, пробудившись у вод озера Куивиэнен под светом звезд еще до создания Солнца и Луны. Предполагая, что освещенность от звезд совпадала с освещенностью от полной Луны (земной), оцените, во сколько раз больше звезд на небосводе Арды должно быть видно невооруженным глазом.

Решение (8 баллов):

Невооруженным глазом можно видеть звезды, имеющие видимую звездную величину до 6^m. Для оценки количества звезд применим формулу Зеелигера:

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} \approx 4,$$

где $N(n)$ — количество звезд ярче n-й звездной величины. В таком приближении количество $\mathfrak{N}(m+1)$ звезд в интервале от m до $m+1$ звездной величины может быть выражено формулой

$$\mathfrak{N}(m+1) = N(m+1) - N(m) \approx 4N(m) - N(m) = 3N(m).$$

Принимая количество звезд с $m \leqslant 0$ за 4 (Сириус, Канопус, α Центавра, Арктур), получим выражение

$$\mathfrak{N}(m) \approx 4 \cdot 3^m.$$

Для оценки создаваемой данными звездами освещенности примем, что звезды в интервале от m до $m+1$ звездной величины дают освещенность, равную освещенности от звезды $m+0.5$ звездной величины. Тогда общая освещенность от видимых невооруженным глазом звезд будет равна

$$\mathcal{E} = 4 \cdot E(-0.5) + 4 \cdot 3^1 E(0.5) + 4 \cdot 3^2 E(1.5) + \ldots + 4 \cdot 3^6 E(5.5).$$

Освещенности можно выразить через формулу Погсона, сравнив освещенность от звезды с освещенностью от Луны:

$$m - m_☾ = 2.5 \lg \frac{E_☾}{E(m)}, \quad \text{тогда} \quad E(m) = E_☾ \cdot 10^{0.4(m_☾ - m)}.$$

В таком случае освещенность можно выразить как

$$\mathcal{E} = 4 \cdot E_☾ \cdot 10^{0.4(m_☾ + 0.5)} + 4 \cdot 3^1 \cdot E_☾ \cdot 10^{0.4(m_☾ - 0.5)} + \ldots + 4 \cdot 3^6 \cdot E_☾ \cdot 10^{0.4(m_☾ - 5.5)} =$$
$$= 4 \cdot E_☾ \cdot 10^{0.4 m_☾} \left(3^0 10^{0.4 \cdot 0.5} + 3^1 10^{0.4 \cdot (-0.5)} + \ldots + 3^6 10^{0.4 \cdot (-5.5)}\right).$$

Выражение в скобках можно считать частью геометрической прогрессии со знаменателем $3 \cdot 10^{0.4 \cdot (-1)}$, тогда значение данного выражения равно

$$\frac{(3 \cdot 10^{0.4 \cdot (-1)})^7 - 1}{3 \cdot 10^{0.4 \cdot (-1)} - 1} \cdot 3^0 10^{0.4 \cdot 0.5} = \frac{3^7 \cdot 10^{-2.8} - 1}{3 \cdot 10^{-0.4} - 1} \cdot 10^{0.2} \approx 2 \cdot 10^1.$$

Тогда при подстановке значений $m_☾$ в выражение для $\mathcal{E}$ получим

$$\mathcal{E} \approx 7 \cdot 10^{-4} E_☾ .$$

Таким образом, создаваемая звездами освещенность примерно в $1.5 \cdot 10^3$ раз меньше лунной. Если принять количество видимых невооруженным глазом звезд на небе Земли за $6 \cdot 10^3$, то тогда на небе Арды должно быть около $9 \cdot 10^6$ звезд.

5. Двойная звезда состоит из одинаковых компонент, имеющих радиус 1.3 радиуса Солнца и температуру 6500 K, вращающихся по круговой орбите с радиусом 1.2 а.е. Может ли вокруг одного из компонентов вращаться планета, находящаяся в «зоне жизни» (на поверхности может существовать вода в жидком состоянии), если геометрическое альбедо планеты равно 0.3?

Решение (8 баллов):

Предположим, что плоскость орбиты планеты совпадает с плоскостью орбиты звезд. Рассмотрим внутреннюю границу зоны жизни, определяемую расстоянием, на котором температура планеты будет ниже температуры кипения воды ($T_0 \approx 373\,\mathrm{K}$) в предположении о том, что планета находится близко к одной из звезд и освещенностью от второй звезды можно пренебречь. Освещенность на расстоянии R от звезды светимости L определяется по формуле

$$E = \frac{L}{4\pi R^2}.$$

Количество энергии, которую поглощает планета за единицу времени, определяется при заданном альбедо A и радиусе планеты r как

$$\mathcal{E} = E \cdot \pi r^2 (1 - A).$$

Представив планету абсолютно черным телом и пользуясь законом Стефана-Больцмана, запишем для нее баланс поглощаемой и излучаемой энергии:

$$E \cdot \pi r^2 (1 - A) = 4\pi r^2 \sigma T^4.$$

Тогда зависимость расстояния от температуры при близком расположении орбиты к одной из звезд дается выражением

$$R(T) = \sqrt{\frac{L(1-A)}{4 \cdot 4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4 (1-A)}{4 \cdot 4\pi\sigma T^4}} = \frac{1}{2} R_\star \left(\frac{T_\star}{T}\right)^2 \sqrt{1-A}\,.$$

При подстановке $T = T_0$ получаем значение $R \approx 1.2 \cdot 10^8$ км или 0.77 а.е. Можно заметить, что на таком расстоянии влиянием излучения второй звезды нельзя пренебречь. Действительно, если мы рассмотрим при данном R суммарную освещенность, даваемую обеими звездами, разделенными расстоянием ρ:

$$E = \frac{L}{4\pi R^2} + \frac{L}{4\pi(\rho - R)^2},$$

то температура планеты окажется равной 392 K. Таким образом, если планета и может находиться в зоне жизни, то вблизи центра масс двойной звезды. Количественно отклонение от центра масс, при котором планета еще находится в зоне жизни, можно оценить так. Пусть l — расстояние от звезды до центра масс, l_1 — расстояние от планеты до центра масс. Тогда баланс энергий примет вид

$$\left(\frac{L}{4\pi(l - l_1)^2} + \frac{L}{4\pi(l + l_1)^2}\right) \pi r^2 (1 - A) = 4\pi r^2 \sigma T^4,$$

или, после преобразований и подстановки выражения для светимости звезды,

$$\frac{1}{(l - l_1)^2} + \frac{1}{(l + l_1)^2} = \frac{4T^4}{(1 - A) R_\star^2 T_\star^4}.$$

Поскольку мы знаем, что планета должна находиться не очень далеко от центра масс, то можно воспользоваться формулами приближенных вычислений в предположении о малости l_1/l и привести формулу к виду

$$\frac{2\big(1 + (l_1/l)^2\big)}{l^2\big(1 - 2(l_1/l)^2\big)} = \frac{4T^4}{(1 - A) R_\star^2 T_\star^4}. \tag{1}$$

Решая данное уравнение относительно (l_1/l), получим значение $l_1 \approx 0.3$ а.е. Таким образом, планета не должна подходить к своей звезде ближе, чем на $1.2 - 0.3 = 0.9$ а.е., что показывает, что спутником только одного компонента двойной системы такая планета быть не может. Но в целом «жизнь» вблизи первой точки Лагранжа данной системы возможна, с тем замечанием, что орбиты вблизи точки Лагранжа не являются устойчивыми по отношению к возмущениям.