XXIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2016

14 февраля

10 класс

1. Средняя плотность Сатурна составляет 0.69 г/см^3. Его форма — сплюснутый эллипсоид вращения, причем отношение экваториального радиуса к полярному составляет 1.11. Чему равнялась бы плотность Сатурна, если бы он стал шаром с радиусом, равным полярному радиусу обычного Сатурна?

Решение (8 баллов):

Масса Сатурна при подобных пертурбациях явно не поменялась, поэтому задача сводится к вычислению объема сплюснутого эллипсоида вращения (иначе именуемого сплюснутым сфероидом).

Возможно, некоторые участники просто знают, что объем эллипсоида с полуосями a, b, c можно вычислить как $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Для них задача будет очень простой. Те же, кто не держит в голове подобные мелочи, могут получить эту формулу, исходя из следующих соображений.

Рассмотрим шар радиуса R. Его объем, как известно, равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. Разобьем его на много маленьких кубиков таким образом, чтобы их суммарный объем равнялся объему шара. Затем сплющим или растянем шар в каком-то одном направлении в k раз, выбрав направление так, чтобы оно совпадало с направлением какого-то из ребер кубиков. При этом шар превратится в сплющенный или вытянутый сфероид с полуосями, равными R, R и $k\,R$, а кубики станут прямоугольными параллелепипедами, у которых одна из сторон также изменится в k раз. Поскольку сумма объемов параллелепипедов по-прежнему будет равна объему сфероида, отсюда следует, что объем последнего окажется равным $\frac{4}{3}\pi(k\,R)\,R^2$. Обозначив $a = k\,R$, мы получим частный случай искомой формулы. Очевидно, что растягивая или сжимая получившийся сфероид в направлении, перпендикулярном первому, мы получим аналогичный результат.

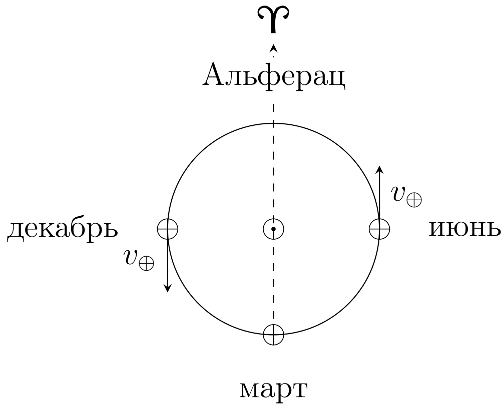
Вернемся к условию. Поскольку Сатурн — сплюснутый сфероид, то его объем уменьшится в 1.11^2 раза (поскольку сожмутся две оси из трех). При постоянной массе это означает, что плотность увеличится в то же число раз. Следовательно, она окажется равной $0.69 \cdot 1.11^2$ г/см^3.

В принципе, вычислить итоговый результат можно, поупражнявшись в умножении в столбик (ввиду отсутствия калькулятора). Однако перед атакой на арифметику стоит задуматься, с какой точностью может быть получен итоговый результат. Поскольку худшее по точности из имеющихся данных содержит две значащих цифры, то и результат умножения считать с большей точностью бессмысленно, а это означает, что последнюю единицу в 1.11 без зазрения совести можно выкинуть. $1.1^2 = 1.21 \approx 1.2$ (еще одна цифра опять-таки лишняя), поэтому численный ответ получится при вычислении 0.69×1.2, что уже существенно проще. Получится 0.83 г/см^3, что и является окончательным ответом.

2. При обработке полученного из наблюдений в красной части видимого диапазона спектра звезды Альферац ($\alpha = 0^h08^m$, $\delta = +29°$) была допущена ошибка. Наблюдения проводились 25 июня, однако при обработке данные перепутали и посчитали, что наблюдения были выполнены 20 декабря. Определите, какую поправку нужно внести в результаты обработки спектра, чтобы исправить ошибку, и оцените (количественно) величину вносимых изменений.

Решение (8 баллов):

Как нетрудно заметить, наблюдения проводились практически в день летнего солнцестояния, а при обработке считалось, что это день зимнего солнцестояния. В эти дни вектора орбитальной скорости Земли параллельны плоскости экватора, но противоположны по направлению, причем один направлен в направлении $\alpha = 0^h$, а другой — $\alpha = 12^h$. Заметим, что $\alpha_\star \approx 0^h$. Следовательно, лучевые скорости звезды по отношению к Земле (т.е. проекции орбитальной скорости Земли на прямую, соединяющую звезду и Землю) в эти дни будут противоположны по направлению, а по модулю равны $v_\oplus \cdot \cos\delta_\star \approx 26$ км/с. Таким образом, надо сместить спектр на $2 \cdot 26 = 52$ км/с или, при $\lambda \approx 6500$ Å (наблюдения проводились в красной части оптического диапазона) примерно на 1 Å. Так как летом Земля движется к точке весны, а зимой — от нее, то при обработке спектр сдвинули в фиолетовую сторону, а нужно было сдвинуть в красную, следовательно, спектр надо сместить на 1 Å в красную сторону.



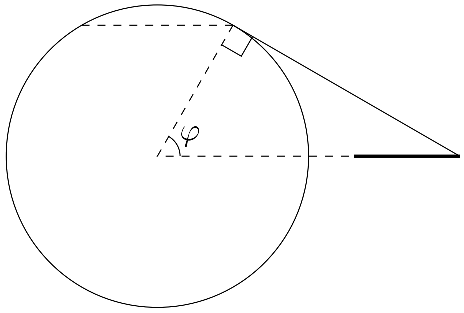
3. Вспомните какое-нибудь изображение Сатурна и оцените долю поверхности планеты, с которой не видны ее кольца.

Решение (8 баллов):

Результат воспоминаний (в негативном виде) должен выглядеть примерно так:

и из него требуется восстановить важное для дальнейшего решения данное: внешний радиус колец примерно в два раза больше радиуса Сатурна.

Выясним, где на Сатурне кольцо будет полностью находиться под горизонтом. Для этого построим чертеж (успешно решившие задачу №1 могут попробовать учесть, что Сатурн не является шаром, но на итоговый результат это повлияет очень мало):

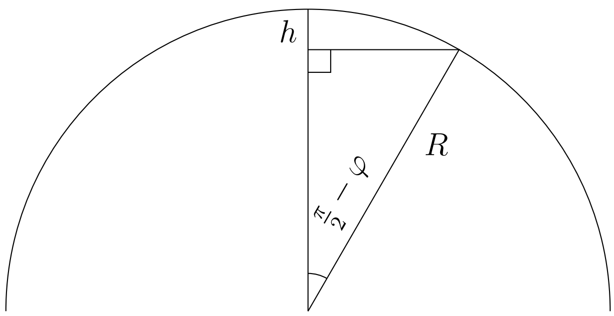


Кольца находятся в плоскости экватора Сатурна, поэтому суточное вращение планеты ни на что влиять не будет. Видно, что в области «шапочки» — на широтах, больших φ — кольца не будут видны (и то же самое касается второй «шапочки» около противоположного полюса). Широта φ легко определяется: поскольку внешний радиус колец в два раза больше радиуса Сатурна, то $\cos\varphi = 1/2$, откуда $\varphi = \pi/3$ (при решении задачи мы будем выражать все углы в радианах, поскольку это окажется удобнее).

Поскольку нас интересует только отношение площадей, то конкретное значение радиуса Сатурна совершенно несущественно, и мы можем принять его за единицу. В этом случае площадь всей поверхности Сатурна окажется равной 4π. Осталось каким-то образом найти площадь «шапочки». Решение этой задачи можно выполнить как минимум двумя способами.

Во-первых, можно сказать, что «шапочка» не слишком сильно отличается от плоскости, так что ее площадь можно сосчитать как обычную площадь круга. Радиус такого круга (при единичном радиусе Сатурна) будет равен $\pi/6$, следовательно, его площадь составит $\pi\,(\pi/6)^2 = \pi^3/36$. Суммарная площадь двух «шапочек» равна $\pi^3/18$, и тем самым относительная доля площади планеты, с которой не будут видны кольца, окажется равной $\pi^2/72$. Это число несложно представить в более симпатичном виде, если вспомнить, что $\pi^2 \approx 10$. В результате ответ будет таким: кольца не видны примерно с $1/7$ (или 14%) поверхности планеты.

Второй способ предполагает, что воспользовавшийся им знает (или смог вывести) формулу площади поверхности сферического сегмента.



Эта площадь равна $2\pi Rh$, где h — высота сегмента (см. рисунок). При единичном радиусе Сатурна

$$h = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 1 - \sin\varphi = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а отсюда искомая доля площади выражается как

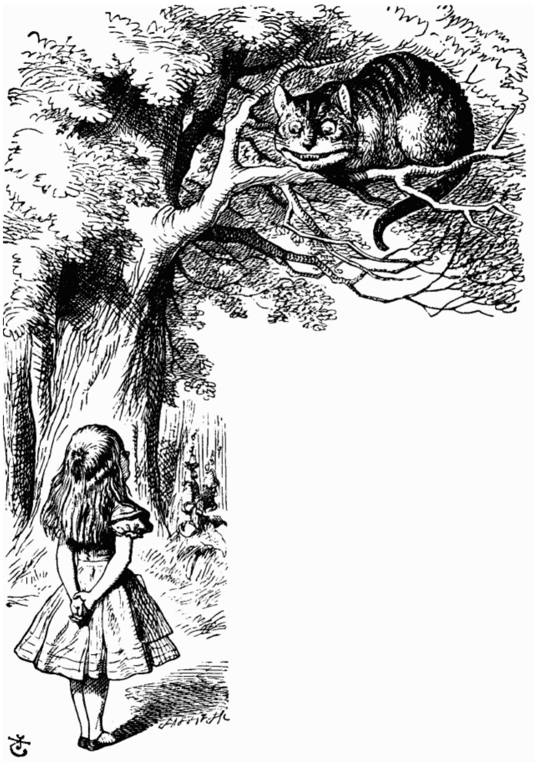
$$\frac{4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4\pi} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \frac{1.7}{2} \approx 0.13 = 13\%.$$

Видно, что оба варианта решения дали практически один и тот же результат.

4. В сказке Льюиса Кэролла у Алисы, попавшей в Страну чудес, постоянно менялся рост. Оцените, во сколько раз изменялось количество звезд, которые Алиса могла наблюдать невооруженным глазом, если ее рост менялся от 5 см до 5 м.

Решение (8 баллов):

Многочисленные источники (иллюстрации, вроде приведенной ниже, фильмы и т.д.) свидетельствуют, что Алиса изменялась в размерах с сохранением пропорций.



Поскольку рост Алисы изменялся в 100 раз, отсюда следует, что и диаметр ее зрачков также изменялся в 100 раз, а площадь — в 10^4 раз. При наблюдении точечных источников излучения (которыми с хорошей точностью можно считать звезды) проницающая способность оптических приборов (в т.ч. глаз) определяется площадью входного отверстия телескопа, зрачка глаза и т.п., поэтому можно считать, что самые слабые звезды, которые могла видеть Алиса наибольшего размера, имели блеск в 10^4 раз меньший, чем самые слабые звезды, которые видела наименьшая Алиса.

Предположим для простоты, что во всей Вселенной равномерно расположены совершенно одинаковые звезды. Тогда, поскольку их светимость фиксирована, освещенность E, создаваемая каждой звездой, будет определяться расстоянием r до нее, причем $E \propto r^{-2}$. Поскольку предельная доступная большой Алисе освещенность в 10^4 раз меньше, чем доступная маленькой, это означает, что в такой Вселенной большая Алиса могла бы видеть звезды, расположенные в шаре радиуса в $\sqrt{10^4} = 10^2$ раз больше, чем маленькая. Так как звезды расположены равномерно, а объем шара пропорционален кубу его радиуса, то большая Алиса видела бы в 10^6 больше звезд, чем маленькая.

Однако если более-менее равномерное расположение звезд во Вселенной (или хотя бы в части Галактики, видимой невооруженным глазом) еще похоже на правду, то утверждение, что все звезды одинаковы, не выдерживает критики. Но тем не менее полученный нами результат можно спасти. Если мы разделим все звезды на классы таким образом, что в пределах одного класса звезды будут иметь примерно одинаковую светимость, то полученный нами результат будет верен для каждого отдельного класса звезд. А тогда и для всех звезд в целом ситуация окажется такой же. Поэтому итоговый ответ — в 10^6 раз.

Заметим, что при решении этой задачи совершенно излишним является использование понятия звездной величины. Конечно, промежуточный пересчет освещенностей в звездные величины (а затем — обратный переход) сам по себе не является неправильным, но существенно усложняет решение задачи. По той же причине при решении совершенно не требуется теорема Зеелигера (хотя возникает большой соблазн ее использовать).

5. Орбитальный период двойной звезды, в которой происходит перетекание вещества с одного компонента системы на другой, составляет 2.5 суток, причем известно, что за последние 100 лет этот период увеличился на 20 секунд. Массы компонентов составляют 3 и 5 масс Солнца. Оцените темп аккреции в системе — массу вещества, перетекающую с одного компонента за другой, за год. Какой из компонентов отдает вещество, а какой — получает?

Решение (8 баллов):

Поскольку в системе наблюдается аккреция, то расстояние между звездами всегда оказывается порядка размера самих звезд и, следовательно, орбиты звезд по крайней мере близки к круговым (даже если это не так, мы воспользуемся подобным приближением, поскольку нам нужно получить лишь оценку темпа аккреции). Определим радиусы этих орбит.

Обозначим массы звезд как $\mathfrak{M}_1 = 3\mathfrak{M}_\odot$ и $\mathfrak{M}_2 = 5\mathfrak{M}_\odot$ и будем считать, что в некоторый момент времени большая полуось системы равна a. Тогда, поскольку обе звезды должны вращаться вокруг центра масс системы, радиус орбиты первой звезды вокруг центра масс a_1 равен

$$a_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\, a,$$

и, аналогично, радиус орбиты второй звезды

$$a_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\, a.$$

Если орбитальный период системы P (в тот же момент времени), то линейные скорости движения звезд легко вычисляются:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}, \qquad v_2 = \frac{2\pi a_2}{P}.$$

Давайте подумаем, какие величины должны сохраняться при процессе аккреции. Первое, что можно отметить: поскольку мы рассматриваем перенос массы с одного компонента системы на другой, по-видимому, можно считать, что суммарная масса системы остается неизменной. Кроме этого, в механике существуют законы сохранения, некоторые из которых могут нам пригодиться.

Первый из них — закон сохранения импульса. В данном случае (как и во всех замкнутых системах) он работает, однако для нас почти совершенно бесполезен: несложно убедиться, что в системе отсчета, связанной с центром масс, полный импульс системы равен нулю, и ничего, кроме уже записанных выше выражений для скоростей движения звезд, мы из него получить не сможем.

Второй — закон сохранения полной механической энергии. С ним ситуация еще проще, он в данном случае просто не выполняется. Очевидно, что газ, переместившийся с одной звезды на другую, сталкивается со второй звездой неупругим образом, какая-то часть механической энергии при этом переходит в тепловую и, следовательно, об этом мы можем больше не думать.

Остался закон сохранения момента импульса. В рассматриваемой задаче момент импульса системы складывается из двух орбитальных моментов звезд, а также моментов импульса, связанных с вращением каждой из звезд. Сразу же пренебрежем моментом импульса, создаваемым веществом аккреционного диска (находящимся «в пути» с одной звезды на другую) — его масса явно очень мала по сравнению с массами звезд. Однако и моменты, связанные с осевым вращением, также явно много меньше, чем орбитальные, поэтому мы ограничимся записью только суммарного орбитального момента импульса системы. Орбиты круговые, скорости всегда перпендикулярны радиус-векторам звезд, поэтому выражение получается достаточно простым:

$$J = \mathfrak{M}_1 v_1 a_1 + \mathfrak{M}_2 v_2 a_2.$$

Преобразуем его, подставив выражения для скоростей звезд и радиусов их орбит. Получим

$$J = 2\pi \left(\frac{\mathfrak{M}_1 a_1^2}{P} + \frac{\mathfrak{M}_2 a_2^2}{P} \right) = \frac{2\pi}{P} \left(\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2^2 a^2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} + \frac{\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_1^2 a^2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} \right) = \frac{2\pi}{P} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 a^2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}.$$

Нам известен III закон Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)},$$

выразим из него большую полуось системы a и подставим в выражение для момента импульса

$$J = \frac{2\pi}{P} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \left(\frac{P^2}{4\pi^2} G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \right)^{2/3}.$$

Вот именно эта величина и должна сохраняться в процессе аккреции.

Можно заметить, что многие множители в выражении сохраняются и сами по себе. Очевидно, что не меняются константы, а также, как мы уже выяснили, остается постоянной суммарная масса системы. Поэтому, выкидывая все лишнее, мы обнаруживаем, что константой должна оставаться величина $P^{1/3}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$.

Теперь предположим, что за один год со второго компонента на первый переместилась масса $\Delta\mathfrak{M}$ (в нашей упрощенной модели масса фактически мгновенно пропадает на одной звезде и появляется на второй). В результате масса первого компонента стала равной $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_1 + \Delta\mathfrak{M}$, а масса второго компонента$\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2 + \Delta\mathfrak{M}$. За то же время период системы поменялся на величину ΔP и стал равным $P + \Delta P$. Тогда

$$(P + \Delta P)^{1/3}(\mathfrak{M}_1 + \Delta\mathfrak{M})(\mathfrak{M}_2 - \Delta\mathfrak{M}) = P^{1/3}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2.$$

Отсюда

$$\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2\Delta\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1\Delta\mathfrak{M} + (\Delta\mathfrak{M})^2}{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2} = \left(\frac{P}{P + \Delta P} \right)^{1/3}.$$

Заметим, что $\Delta P \ll P$ (что просто следует из условия), а переместившаяся за год масса $\Delta\mathfrak{M}$, очевидно, также намного меньше каждой из масс звезд. Поэтому в левой части равенства пренебрежем $(\Delta\mathfrak{M})^2$, а правую перепишем в более удобном виде:

$$1 + \frac{(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)\,\Delta\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P}} \right)^{1/3}.$$

Известно, что при $x \approx 0$ верны приближения

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \qquad (1+x)^y \approx 1 + y \cdot x.$$

Воспользуемся ими и преобразуем правую часть равенства:

$$1 + \frac{(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)\,\Delta\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta P}{P},$$

откуда выражаем

$$\Delta\mathfrak{M} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta P}{P} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}.$$

Осталось вычислить ответ. Поскольку темп аккреции можно выразить в массах Солнца в год (как это обычно и делается), то значения масс можно подставлять в формулу прямо в массах Солнца, нужно лишь вычислить $\Delta P/P$. Из условия следует, что за один год (мы рассматриваем изменения за этот интервал времени) период системы увеличивается на 0.2 секунды, а значение периода $P = 2.5$ суток $= 2.5 \cdot 86\,400$ секунд $\approx 2 \cdot 10^5$ секунд. Поэтому

$$\Delta\mathfrak{M} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \, \frac{3 \cdot 5}{3 - 5} = -2.5 \cdot 10^{-6} \mathfrak{M}_\odot.$$

Таким образом, темп аккреции в системе составляет $(2 \div 3) \cdot 10^{-6}$ $\mathfrak{M}_\odot$/год. Причем, поскольку величина $\Delta\mathfrak{M}$ получилась отрицательной, наше исходное предположение о том, какая звезда отдает вещество, а какая — получает, оказалось неправильным: теряет вещество менее массивная звезда, а получает — более массивная (хотя это и кажется странным, но такой процесс вполне возможен, более того, из проделанных нами выкладок на самом деле следует, что такое явление будет наблюдаться во всех двойных с аккрецией, орбитальный период которых растет со временем).

В заключение заметим, что у описанной в задаче двойной звезды есть реальный «прототип» с близкими параметрами — затменная двойная U Цефея, причем в процессе решения мы получили и в самом деле довольно точную оценку темпа аккреции в этой системе.