XXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

заочный отборочный тур, решения

2013–2014

5 декабря
15 января

---

11 класс

---

1. Нептун, Солнце, Меркурий, Плутон, Марс. Выстройте эти объекты в порядке увеличения минимального расстояния от Земли.

Решение:

Ответ: Марс, Меркурий, Солнце, Плутон, Нептун. Несмотря на то, что большая полуось орбиты у Нептуна меньше, чем у Плутона, из-за эксцентриситета орбиты последнего он периодически оказывается ближе к Солнцу (и к Земле), чем Нептун. Орбита Меркурия также имеет значительный эксцентриситет (около 0.2), но даже с учетом этого минимальное расстояние от Меркурия до Земли составляет $1 - 0.4 \cdot (1 + 0.2) \approx 0.52$ а.е., что больше, чем минимальное расстояние до Марса (≈ 0.5 а.е.).

2. Некто утверждал, что из того факта, что два небесных тела имеют одинаковый химический состав, следует, что они имеют одинаковую среднюю плотность. Покажите, что это не так, приведя хотя бы один пример обратного.

Решение:

Можно предложить несколько вариантов решений. Например, звезды главной последовательности и звезды-гиганты имеют практически одинаковый химический состав: они состоят в основном из водорода и гелия с малой примесью других элементов, однако их средние плотности отличаются в десятки тысяч раз. Естественно, годятся и другие примеры, но необходимо, чтобы при сравнительно небольшом различии химического состава плотность объектов значительно отличалась.

3. Период обращения Энцелада вокруг Сатурна равен 1.4 земных суток, а большая полуось его орбиты в 4 раза больше радиуса Сатурна. На основании этих данных оцените среднюю плотность Сатурна.

Решение:

По уточненному III закону Кеплера

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_{\saturn}}{4\pi^2},$$

где a — большая полуось орбиты Энцелада, P — период его обращения вокруг Сатурна, $M_{\saturn}$ — масса Сатурна. Обозначив β отношение большой полуоси орбиты Энцелада к радиусу Сатурна $R_♄$ ($\beta = a/R_♄$) и выполнив преобразования, можно получить:

$$\frac{\beta^3 R_♄^3}{P^2} = \frac{GM_♄}{4\pi^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\beta^3}{P^2} = \frac{G}{3\pi}\frac{3M_♄}{4\pi R_♄^3} = \frac{G}{3\pi}\bar{\rho}_♄,$$

где $\bar{\rho}_♄$ — средняя плотность Сатурна.

Отсюда

$$\bar{\rho}_♄ = \frac{3\pi}{G}\frac{\beta^3}{P^2} \approx \frac{10 \cdot 4^3}{7 \cdot 10^{-8}(1.4 \cdot 3600 \cdot 24)^2} \approx \frac{2}{3} \approx 0.7\,\text{г/см}^3.$$

4. Космонавт в течение 26 часов летал вокруг Земли над экватором на космическом корабле со скоростью 7.8 км/с. Сколько раз за это время он видел восход Солнца?

Решение:

Из того факта, что скорость корабля мало отличается от первой космической для Земли, можно понять, что он летал по круговой орбите, радиус которой примерно равен радиусу Земли. Длина экватора Земли составляет около 40 тыс. км, так что продолжительность одного оборота вокруг Земли по низкой орбите равна примерно $4 \cdot 10^4/7.8/3600 \approx 1.4$ часа. Отсюда следует, что за время полета корабль успел совершить вокруг Земли 18 полных оборотов ($26/1.4 \approx 18.6$). Однако за это время Земля также успела совершить полный оборот вокруг своей оси (т.к. прошло чуть больше солнечных суток).

Если корабль двигался по направлению вращения Земли, то на каждом витке он оказывался в той же самой точке относительно Солнца чуть раньше, чем заканчивал полный виток по орбите. Следовательно, относительно Солнца он совершил на один оборот больше, чем относительно Земли, и тогда космонавт успел увидеть 19 восходов Солнца.

Напротив, если корабль двигался против направления вращения Земли, то космонавт увидел только 17 восходов.

Тот же самый результат можно получить, воспользовавшись формулой синодического движения:

$$\frac{1}{T_{\text{К}\oplus}} = \frac{1}{T_{\text{К}\odot}} \mp \frac{1}{T_{\oplus\odot}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{T_{\text{К}\odot}} = \frac{1}{T_{\text{К}\oplus}} \pm \frac{1}{T_{\oplus\odot}},$$

где $T_{\text{К}\oplus}$ — период корабля относительно Земли, $T_{\text{К}\odot}$ — период корабля относительно Солнца, $T_{\oplus\odot}$ — период обращения Земли вокруг своей оси относительно Солнца (солнечные сутки); знак «−» ставится в случае сонаправленных движений, «+» — в случае противоположно направленных.

В случае движения корабля по вращению Земли $T_{\text{К}\odot} \approx 1.32$ и, следовательно, относительно Солнца корабль успевает сделать 19 полных оборотов, а в обратном случае $T_{\text{К}\oplus} \approx 1.49$ и 17 полных оборотов относительно Солнца.

Примечание. Участник должен либо рассмотреть оба варианта движения корабля: как по вращению Земли, так и против, либо явно указать, что корабли практически всегда запускаются по вращению и можно рассматривать только этот вариант.

5. На Солнце наблюдается пятно размером с Землю. Представьте себе, что в этот момент Солнце внезапно исчезло и на небе осталось только пятно! Можно ли будет увидеть его невооруженным глазом?

Решение:

Для того, чтобы ответить на вопрос задачи, нужно оценить видимую звездную величину пятна. Так как пятно и Солнце находятся от Земли на одном и том же расстоянии, то разность видимых звездных величин пятна и Солнца будет обеспечиваться отношением их светимостей: $\Delta m = m_\odot - m_\text{п} = -2.5 \lg \frac{L_\odot}{L_\text{п}}$, где $m_\odot \approx -27^m$. Считая пятно абсолютно черным телом, можно сказать, что его светимость зависит от радиуса R и температуры T таким образом: $L \propto R^2 T^4$.

Известно, что радиус Земли примерно в 100 раз меньше радиуса Солнца. Пятно кажется темным на фоне более яркой поверхности Солнца, потому что имеет меньшую температуру, чем окружающие области: температура пятен примерно в полтора-два раза меньше температуры обычной поверхности Солнца. Таким образом

$$\Delta m = -2.5 \lg (100^2 \cdot 2^4) = -10 \lg 2^4 \approx -12,$$

следовательно, звездная величина пятна равна: $m_\text{п} = m_\odot - \Delta m = -27 - (-12) = -15^m$, что меньше звездной величины полной Луны. Видно, что пятно все равно остается самым ярким объектом на земном небе.

Можно рассуждать проще. Различие размеров пятна и Солнца в 100 раз и, следовательно, в площадях в 10^4 раз дает разницу в звездных величинах, равную 10. Следовательно, чтобы пятно не было видно (т.е. его звездная величина была больше 6^m), нужно получить разницу больше чем в 20 звездных величин (т.е. различие в светимостях в 10^8 раз) за счет различия температур. Это значит, что температуры пятна и Солнца должны отличаться больше, чем в $\sqrt[4]{10^8} = 100$ раз, т.е. температура пятна должна быть меньше 60 K, что, очевидно, нелепо.

Важно отметить, что угловые размеры пятна в данном случае несущественны: требуется просто увидеть пятно, а не наблюдать его как протяженный объект. Например, угловые размеры всех звезд на небе (кроме, естественно, Солнца) намного меньше углового диаметра пятна (который составляет примерно $20''$), что никак не мешает нам их видеть.