XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2013

16 февраля

---

11 класс

---

1. Объект, принадлежащий Солнечной системе, находится в полюсе эклиптики, и при этом известно, что у этого объекта величина годичного параллакса и годичной аберрации совпадают. Оцените расстояние до объекта. Какой будет видимая с Земли траектория движения этого объекта на небесной сфере в течение одного земного года?

Решение:

Так как объект находится в полюсе эклиптики, то в течение года за счет аберрации он описывает на небесной сфере окружность с радиусом, равным величине годичной аберрации — $20''$. Если эта величина неизвестна, ее можно получить из выражения для аберрации

$$\sigma = \frac{V}{c}\sin\theta,$$

где V — скорость движения наблюдателя относительно объекта (в данном случае орбитальная скорость Земли, около 30 км/с), c — скорость света, θ — угол между направлением движения наблюдателя и направлением на объект (так как объект в полюсе эклиптики, $\theta = 90°$), σ — аберрационный угол в радианах.

Поскольку расстояние до объекта в парсеках $r = 1/\pi$, где π — годичный параллакс в секундах, получаем, что расстояние до объекта составляет 1/20 пк. Сразу же заметим, что объект, принадлежащий Солнечной системе, должен иметь на таком расстоянии небольшую пространственную скорость (ее максимально возможную величину можно оценить и количественно как параболическую скорость на соответствующем расстоянии от Солнца, которая составляет 0.4 км/с), поэтому собственным движением объекта в течение года безусловно можно пренебречь, вид и размеры траектории движения объекта по небесной сфере определяются только параллаксом и аберрацией.

И за счет годичной аберрации, и за счет годичного параллакса объект будет смещаться на небесной сфере на $20''$ по отношению к истинному положению. Однако смещение за счет параллакса направлено в сторону, противоположную положению Земли на орбите, а смещение за счет аберрации — в сторону, совпадающую с направлением орбитальной скорости Земли. Поэтому оба смещения всегда перпендикулярны друг другу, и суммарное смещение объекта будет составлять $\sqrt{2}\cdot 20'' = 28'' \approx 0'.5$. Так как оно постоянно в течение года, а его направление меняется с практически постоянной угловой скоростью (отклонения обусловлены тем, что орбита Земли обладает небольшим эксцентриситетом), то объект в течение года опишет на небесной сфере окружность с радиусом $0'.5$.

2. При радионаблюдениях внегалактического водородного облака было обнаружено, что оно излучает на длине волны 28 см, причем ширина линии излучения составляет 0.1 мм. Известно также, что угловые размеры облака на небе составляют $4''$. Оцените массу этого облака.

Решение:

Известно, что нейтральный водород излучает на длине волны 21 см. Все остальные возможные линии излучения водорода находятся в намного более коротковолновых областях, поэтому других разумных вариантов отождествления наблюдаемой линии не имеется. Объект, по условию, является внегалактическим, поэтому разница между наблюдаемой и лабораторной длинами волн излучения должна объясняться космологическим красным смещением (второй возможный вариант — удаление сравнительно близкого облака от нас со скоростью, сравнимой со скоростью света — нереалистичен).

Воспользуемся законом Хаббла для оценки расстояния до облака. Как известно, $cz = Hr$, где — скорость света, $z = \Delta\lambda/\lambda$ — красное смещение, r — расстояние до объекта, H — постоянная Хаббла (примем ее значение равным 70 км/с/Мпк). Тогда расстояние до объекта составляет $r \approx 1.4 \cdot 10^3$ Мпк.

Из определения парсека следует, что на расстоянии $1.4 \cdot 10^9$ пк под углом $1''$ видно расстояние $1.4 \cdot 10^9$ а.е. Следовательно, характерный радиус облака составляет $3 \cdot 10^9$ а.е.

Ширина спектральной линии позволяет найти характерную скорость v движения атомов в облаке. Линия расширяется из-за допплеровского смещения, поэтому

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

где $\lambda = 28$ см (края линии тоже меняют длину волны из-за космологического красного смещения, поэтому сравнивать ширину линии нужно именно с наблюдаемой длиной волны), $\Delta\lambda = 0.05$ мм (половина ширины линии). Отсюда получаем $v \approx 50$ км/с.

Найти связь между характерной скоростью и массой облака можно двумя способами. Наиболее корректный — воспользоваться теоремой вириала. Известно, что для устойчивой самогравитирующей системы сумма удвоенной средней кинетической энергии и средней потенциальной энергии равна нулю. Предполагая, что все атомы облака имеют скорость v, и зная, что потенциальная энергия гравитирующего шара массы M и радиуса R примерно составляет $-\frac{GM^2}{R}$ (G — гравитационная постоянная), получаем равенство:

$$2\,\frac{Mv^2}{2} - \frac{GM^2}{R} = 0,$$

откуда

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Можно воспользоваться и более простыми соображениями. Все частицы облака движутся по некоторым орбитам вокруг центра облака. Очевидно, что максимальную скорость будут иметь частицы, находящиеся на границе облака, причем их скорость можно приближенно оценить как круговую скорость движения вокруг массы M на орбите радиуса R. Тогда

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Дальнейшие вычисления удобнее проводить в системе единиц «масса Солнца, астрономическая единица, год». В этой системе единиц $G = 4\pi^2$, $v \approx 10$ (1 а.е./год ≈ 4.74 км/с), а радиус облака в астрономических единицах нам уже известен.

Тогда

$$M = \frac{v^2 \cdot R}{G} = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^9}{4 \cdot 10} \approx 10^{10} \text{ масс Солнца.}$$

3. Оцените величину разности между экваториальным и полярным радиусами Юпитера. Радиус Юпитера примерно в 11 раз больше радиуса Земли, период вращения Юпитера вокруг своей оси составляет 10 часов.

Решение:

Юпитер при вращении должен иметь форму, соответствующую некоторой эквипотенциальной поверхности, определяемой гравитационным потенциалом и потенциалом центробежной силы. Если обозначить экваториальный радиус Юпитера R, а полярный $R-\Delta R$, то условие равенства потенциалов в некоторой точке экватора и на полюсе можно записать как

$$-\frac{GM}{R-\Delta R}=-\frac{GM}{R}-\frac{\omega^2R^2}{2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Юпитера, ω — угловая скорость вращения Юпитера (поскольку сжатие Юпитера невелико, при вычислении гравитационного потенциала можно считать, что он близок к потенциалу тела со сферически-симметричным распределением плотности).

Преобразуем это выражение к виду

$$GM\left(\frac{\Delta R}{(R-\Delta R)\,R}\right)=\frac{\omega^2R^2}{2}$$

и, учитывая, что $\Delta R \ll R$, пренебрежем ΔR в знаменателе в левой части равенства. Тогда

$$\Delta R \approx \frac{\omega^2R^4}{2GM}$$

Для удобства выразим массу Юпитера через его радиус и среднюю плотность ρ:

$$M=\frac{4}{3}\rho R^3,$$

а угловую скорость — через период $P=2\pi/\omega$. В результате получим

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{3\pi}{2G\rho P^2}$$

Зная, что средняя плотность Юпитера немного больше плотности воды, вычисляем $\Delta R/R \approx 0.05$. Таким образом, ΔR составляет около 11/20 радиусов Земли, т.е. около 3.5 тыс.км (реальное значение около 4.6 тыс.км).

4. Двойная система состоит из двух белых карликов, вращающихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Известно, что такая система испускает гравитационные волны с частотой, равной удвоенной орбитальной частоте системы. Оцените минимально возможную длину волны гравитационного излучения такой двойной системы.

Решение:

Минимальной длина волны получится тогда, когда частота волны будет максимальной, следовательно, нам нужно оценить максимально возможную орбитальную частоту системы. Очевидно, что она будет достигнута в том случае, если массы обоих белых карликов будут максимально возможными, а расстояние между ними — минимально возможным. Максимально возможная масса белого карлика (т.н. предел Чандрасекара) составляет около 1.4 массы Солнца, а характерный размер белого карлика сравним с размером Земли, причем расстояние между центрами карликов в двойной системе, очевидно, ограничено снизу суммой радиусов карликов.

Запишем третий закон Кеплера для такой экстремальной системы:

$$\frac{P^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)},$$

где большая полуось a сумма радиусов карликов, $a\sim 10^4$ км, а M_1 и M_2 совпадают с максимально возможной массой карлика. Вычисляя период P, получаем, что он составляет около $P \sim 10^1$ с, следовательно, орбитальная частота имеет величину порядка 10^{-1} Гц. Из-за грубости оценки радиуса карлика (и расстояния между ними в системе) учет того, что частота излучения в два раза больше, практически лишен смысла, поэтому та же порядковая оценка может быть использована и как оценка частоты излучения гравитационных волн.

Известно, что гравитационные волны распространяются со скоростью света. Поэтому $\lambda = c/\nu$, где c — скорость света, отсюда получаем оценку минимально возможной длины волны — порядка 10^9 м.

5. Поверхностная яркость солнечного пятна в 5 раз меньше поверхностной яркости фотосферы Солнца. Оцените индукцию магнитного поля в пятне, если известно, что поле с индукцией B создает магнитное давление $p = \varkappa B^2$, коэффициент $\varkappa \approx 4 \cdot 10^5$ Па/Тл^2. Плотность вещества фотосферы составляет около 10^{-4} кг/м^3.

Решение:

Существование и стабильность солнечных пятен в течение достаточно длительного времени (до месяца) обеспечивается тем, что граница пятна находится в механическом равновесии: давление снаружи полностью уравновешено давлением изнутри. Кроме этого, плотность вещества внутри пятен практически не отличается от плотности снаружи (иначе то же равновесие также нарушилось бы, но уже за счет появления силы Архимеда).

Однако, так как поверхностная яркость внутри пятна существенно меньше, это означает, что и температура вещества внутри пятна также меньше. При одинаковой плотности вещества это означает, что газовое давление внутри пятна меньше, чем снаружи, поэтому для обеспечения механического равновесия необходимо добавочное давление изнутри, которое и обеспечивается магнитным полем. Следовательно, мы можем найти магнитное давление p, вычислив разность внешнего p_e и внутреннего p_i газовых давлений.

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, получим, что

$$p = p_e - p_i = \frac{R}{\mu}\rho(T_e - T_i),$$

где R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса вещества фотосферы (которую можно принять равной 1 г/моль, поскольку оно в основном состоит из атомарного водорода), ρ — плотность фотосферы, T_e и T_i — температуры снаружи и внутри пятна. Температура T_e известна и составляет около $6 \cdot 10^3$ К, а температуру T_i оценим, исходя из данных о соотношениях поверхностных яркостей. Так как они пропорциональны четвертой степени температуры, то $T_e/T_i = \sqrt[4]{5} \approx 1.5$. Поэтому

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T_e(1 - T_i/T_e) = \frac{R}{\mu}\rho T_e/3.$$

Подставляя численные значения, получаем, что магнитное давление в пятне составляет около $1.6 \cdot 10^3$ Па, а отсюда индукция магнитного поля получается равной примерно 0.06 Тл.