XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2012

10 марта

---

10 класс

---

1. Первый открытый белый карлик (достаточно яркий объект с звездной величиной $+8^m.4$) был обнаружен только в 1862 году (кстати, почти точно 150 лет назад). Однако затем он в течение нескольких десятков лет не наблюдался, и доказать, что это действительно белый карлик, удалось только в 1915 году. Почему так произошло?

Решение:

Существует несколько причин, из-за которых возможность наблюдать тот или иной астрономический объект периодически пропадает. Самый распространенный случай — объект находится недалеко от эклиптики и каждый год на некоторое время оказывается недалеко от Солнца (при этом его наблюдения, естественно, практически невозможны). Наблюдению слабых объектов может мешать также находящаяся недалеко на небе Луна. Однако во всех подобных случаях период недоступности для наблюдений заведомо не превышает год, а в рассматриваемом случае наблюдения не проводились почти полвека.

Еще один возможный вариант — вспыхивающий объект с большим интервалом времени между вспышками. Однако, если между вспышками объект не наблюдался, то это означает, что его блеск во время вспышки возрастал более чем на 10^m (проницающая способность телескопов в начале XX века доходила до 20^m), что возможно только для вспышек Новых (которые не повторяются раз в несколько десятков лет).

Остается только один вариант — наш белый карлик должен быть компонентом двойной системы, второй компонент которой намного ярче. Тогда возможна ситуация, при которой белый карлик можно будет наблюдать только тогда, когда он окажется в апоастре своей орбиты (и отойдет на максимально возможное расстояние от напарника). Именно так и было, поскольку первый обнаруженный белый карлик — это Сириус B, рядом с которым находится намного более яркий Сириус A.

2. Обсерватория «Спектр-Р» находится на орбите с большой полуосью 200 тыс. км и расстоянием в апогее 350 тыс.км. Направление параболической антенны, обеспечивающей связь аппарата с наземным центром управления при прохождении перигея орбиты, необходимо корректировать раз в 3 минуты. Передача данных антенной ведется на частоте 15 ГГц. Оцените диаметр этой антенны.

Решение:

Заметим, что, поскольку у орбиты есть апогей и перигей, то это орбита вокруг Земли. Вычислим расстояние до обсерватории в перигее орбиты r_π, зная расстояние в апогее r_α и большую полуось a. Очевидно, что $2a = r_\alpha + r_\pi$, отсюда получаем $r_\pi = 2a - r_\alpha = 50$ тыс. км.

Воспользовавшись известным соотношением (т.н. «интегралом энергии» — одной из форм записи закона сохранения энергии для задачи двух тел)

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная, получим скорость движения обсерватории в перигее орбиты, она окажется равной примерно 4 км/с.

Можно также заметить, что, поскольку орбита обсерватории достаточно сильно вытянута, скорость в перигее должна мало отличаться от параболической (второй космической) скорости на расстоянии 50 тыс. км от центра Земли. Вспомнив, что параболическая скорость на поверхности Земли составляет около 11 км/с и она обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния, получаем, что искомая скорость составляет $11 \cdot \sqrt{6.4/50} \approx 4$ км/с (такая оценка завысит результат примерно на 0.1 км/с, что для получения ответа в задаче практически несущественно).

Вычислим угловую скорость движения обсерватории при наблюдении с Земли. Поскольку радиус Земли примерно в 8 раз меньше расстояния до обсерватории в перигее, расстоянием между центром Земли и наземным центром управления можно пренебречь. Получаем $\omega = v/r_\pi = 8 \cdot 10^{-5}$ $с^{-1}$. Из условия следует, что за время τ, равное трем минутам, Земля с точки зрения обсерватории успевает переместиться на угловое расстояние, совпадающее с угловым разрешением антенны (после чего излучение антенны перестает «попадать» на Землю и антенну необходимо поворачивать). Следовательно, угловое разрешение антенны составляет $\omega\tau$. С другой стороны, оно же, как известно, примерно равно $\frac{\lambda}{D}$, где λ — длина волны, на которой работает антенна, а D — ее диаметр. Отсюда получаем, что

$$D = \frac{\lambda}{\omega\tau} = \frac{c}{\nu\omega\tau},$$

где c — скорость света, ν — частота излучения антенны. Подставляя численные данные, получаем итоговый результат — 1.4 метра (реальный диаметр антенны реальной обсерватории чуть больше — 1.5 метра, и этот ответ можно получить при более точных вычислениях).

3. Один рассеянный петербургский астроном-любитель, строивший самодельный телескоп, как-то забыл на подоконнике линзу для будущего объектива. В один прекрасный день он обнаружил, что в ковре, лежащем на полу, прожжена дыра. Известно, что фокусное расстояние линзы равнялось 1 м, подоконник находился на высоте 80 см от пола. Определите примерную дату порчи ковра.

Решение:

Для того, чтобы прожечь ковер, линза должна была сфокусировать на нем излучение Солнца. Отсюда следует, что в тот момент, когда в ковре была прожжена дыра, расстояние от линзы до места прожига равнялось фокусному расстоянию линзы. Исходя из этого, несложно найти высоту Солнца над горизонтом — ее можно определить как угол в прямоугольном треугольнике, гипотенуза которого равна 1 м, а противолежащий катет — 0.8 м. Т.е. требуется найти угол, синус которого равен 0.8.

При наличии калькулятора это очень просто, однако без него все несколько сложнее. Можно сразу же заметить, что искомый угол больше 45° (его синус примерно 0.7) и меньше 60° (его синус около 0.87), причем ближе именно к 60°. Представим искомую высоту h как $h = 60° - \theta$, где θ — некоторый малый угол. В таком случае

$$\sin h = \sin(60° - \theta) = \sin 60° \cos\theta - \cos 60° \sin\theta \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\theta = 0.8$$

(если θ выражен в радианах, то, поскольку он мал, его синус примерно равен самому углу, а косинус — единице). Решаем получившееся уравнение и получаем $\theta \approx 0.13$. Переводя обратно радианы в градусы, получаем, что $\theta \approx 7^\circ$, т.е. высота Солнца над горизонтом составляет около 53°.

Так как широта Петербурга $\varphi = 60^\circ$, то максимальная высота подъема Солнца над горизонтом в нем $h_{\max} = 90^\circ - \varphi + 23^\circ.5 = 53^\circ.5$. Получается, что Солнце прожигало ковер тогда, когда находилось на максимально возможной высоте над горизонтом, т.е. это было в полдень в окрестности дня летнего солнцестояния. Отсюда ответ — ковер пострадал во второй половине июня.

Заметим, что ответ этой задачи можно было бы получить более простым, но менее «честным» способом — исходя из предположения, что он существует. В самом деле, Петербург находится не за Полярным кругом, Солнце в нем каждый день встает и заходит, поэтому на высоте, например, 10° над горизонтом оно может оказаться в течение большей части года (кроме окрестностей зимнего солнцестояния), причем даже по два раза в сутки. Если существует некоторый небольшой интервал дат, являющийся ответом задачи, это означает, что на соответствующей высоте (очевидно, наибольшей) Солнце бывает только в эти даты. Отсюда сразу же следует ответ, и остается только убедиться, что он согласуется с численными данными, приведенными в задаче.

4. Обозначим B видимую звездную величину звезды в полосе B (синей части оптического диапазона), а V — видимую звездную величину в полосе V (желто-зеленой части диапазона). Поглощение межзвездной средой в полосе V определяется формулой $A_V = 3 \cdot E_{B-V}$. Избыток цвета E_{B-V} определяется как разность наблюдаемого показателя цвета $(B-V)$ и истинного $(B-V)_0$, т.е. $E_{B-V} = (B-V) - (B-V)_0$.

Астроном наблюдает звезду, светящую через облако межзвездной среды. Из наблюдений было получено, что $V = 1^m.8$, а годичный параллакс звезды составил $\pi = 0''.02$. Известно, что для данного типа звезд истинный показатель цвета $(B-V)_0 = -0^m.3$, однако его измеренное значение оказалось равным $(B-V) = 0^m.5$. Найдите истинную $(M_V)_0$ и абсолютную болометрическую звездную величину M_{bol}, если известно, что для этого типа звезд болометрическая поправка $BC = -2^m.8$. Оцените спектральный класс звезды.

Решение:

Несмотря на сложную формулировку, задача решается очень просто — надо лишь внимательно прочитать условие и последовательно вычислять все необходимые величины.

Избыток цвета
$$E_{B-V} = (B-V) - (B-V)_0 = 0.5 + 0.3 = 0^m.8.$$

Следовательно, поглощение в полосе V составляет

$$A_V = 3 \cdot E_{B-V} = 2^m.4,$$

поэтому видимая звездная величина в полосе V, если бы не было поглощения, оказалась бы равной
$$V_0 = V - A_V = -0^m.6.$$

Расстояние до звезды мы можем получить по известному годичному параллаксу, оно составляет $r = 1/0.02 = 50$ пк, поэтому истинная абсолютная звездная величина в полосе V составляет

$$(M_V)_0 = V_0 - 5\lg r + 5 = -0.6 - 5(1 + \lg 5) + 5 \approx -0.6 - 5 - 5 \cdot 0.7 + 5 = -4^m.1.$$

Получающийся при вычислениях $\lg 5$ можно оценить несколькими различными способами. Например (не самый короткий, но зато дающий очень точную оценку вариант):

$$\lg 5 = \frac{1}{2}\lg 25 = \frac{1}{2}(1 + \lg 2.5) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\log_{2.5} 10}\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2.512\ldots}\right) = 0.6990\ldots$$

Точное значение равно $0.69897\ldots$, так что относительная погрешность этого результата около одной сотой процента. Но для наших целей такая точность явно избыточна, достаточно ограничиться $\lg 5 \approx 0.7$.

Теперь получим абсолютную болометрическую звездную величину. Несложно догадаться, что болометрическую поправку BC нужно прибавить к уже полученной $(M_V)_0$ или отнять от нее (поскольку умножать, делить и т.п. звездные величины явно бессмысленно), при этом понятно, что болометрическая величина (во всех возможных диапазонах излучения в целом) должна быть меньше (а звезда, соответственно, ярче), чем в каком-то одном. Отсюда вывод:

$$M_{\rm bol} = (M_V)_0 + BC = -4.1 - 2.8 = -6^m.9.$$

Остался вопрос о спектральном классе. Отрицательный истинный показатель цвета $(B-V)_0$ означает, что она «более синяя, чем желтая». Следовательно, это какой-то из спектральных классов, соответствующих бело-голубым звездам (O,B).

5. При обработке наблюдений проектируемой космической обсерватории "Gaia", которая будет определять координаты звезд на небесной сфере с погрешностью около 10^{-5} угловой секунды, необходимо учитывать отклонение света, приходящего от звезд, в гравитационном поле, создаваемом объектами Солнечной системы. Определите, отклонение света какими объектами необходимо учитывать, если известно, что луч света, проходящий непосредственно у поверхности Солнца, отклоняется при этом на $1''.75$.

Решение:

Очевидно, что для решения задачи требуется каким-либо образом получить выражение, связывающее между собой параметры объекта, отклоняющего свет, и угол отклонения. Прямой вывод этого выражения заведомо выходит за рамки школьной программы (даже с поправкой на дополнительные возможности участников олимпиад), однако его можно получить и другим путем, воспользовавшись так называемым «методом размерностей».

В самом деле, в выражении для угла отклонения, очевидно, могут встретиться только следующие величины: масса объекта M, радиус объекта R, гравитационная постоянная G и скорость света c. При этом сам угол должен получиться безразмерным, поэтому все эти четыре величины должны давать какую-то безразмерную комбинацию. Складывать и вычитать их друг из друга, очевидно, нельзя (размерности всех четырех не совпадают), помещать в показатели степени, в качестве аргументов каких-то функций (логарифмов, тригонометрических функций и т.п.) — тоже. Следовательно, искомая комбинация может иметь только такой вид:

$$M^\alpha \cdot R^\beta \cdot G^\gamma \cdot c^\delta,$$

где α, β, γ, δ — какие-то числа. Если масса измеряется в килограммах, время — в секундах, а расстояние — в метрах, то можно записать итоговую степень, с которой каждая из этих единиц будет встречаться в выражении, и приравнять ее к нулю (поскольку произведение должно быть безразмерным). Затем полученную систему линейных уравнений можно решить и получить значения показателей степеней α, β, γ, δ.

Однако можно и упростить это рассуждение, если вспомнить, что комбинация GM/R имеет размерность квадрата скорости. Отсюда сразу следует, что искомая безразмерная комбинация имеет вид

$$\frac{GM}{Rc^2}.$$

Что еще можно с ней сделать? Можно взять обратную величину, но это явно неправильно — очевидно, что свет сильнее отклоняется более массивными телами, а не наоборот. Можно возвести эту безразмерную комбинацию еще в какую-то степень, однако понятно, что движение света должно быть качественно похожим на движение обычного маломассивного тела, движущегося с большой скоростью, а в этом случае в решении задачи масса появится явно только в первой степени.

Наконец, получившаяся безразмерная комбинация может быть домножена на произвольный безразмерный же коэффициент. Но тут мы можем воспользоваться имеющимися данными — мы знаем параметры для Солнца и знаем получающийся угол отклонения. Подставив в выражение параметры Солнца, несложно убедиться, что дополнительный безразмерный коэффициент равен 4, и итоговое выражение для угла отклонения имеет вид

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2},$$

(и, заметим, является совершенно точным).

Однако этот результат для решения задачи уже не требуется. Поскольку угол отклонения для всех объектов в любом случае пропорционален отношению M/R, нам достаточно надо найти все объекты Солнечной системы, для которых такое отношение оказывается меньше солнечного не более чем в $\approx 2 \cdot 10^5$ раз.

Перебирать все объекты довольно долго, поэтому воспользуемся тем, что средняя плотность всех тел в Солнечной системе примерно одинакова (она отличается менее чем на порядок). Отсюда следует, что отношение M/R^3 для всех тел примерно постоянно, а тогда отношение M/R примерно пропорционально R^2. Таким образом, нам следует найти тела, радиус которых не более чем в $\sqrt{2 \cdot 10^5} \approx 4 \cdot 10^2$ меньше солнечного. Последний составляет около 700 тыс.км, следовательно, нам нужны объекты, радиус которых больше примерно $1.5 \div 2$ тыс. км. Это (помимо Солнца), очевидно, все планеты, а также наиболее крупные спутники планет (галилеевы спутники Юпитера, Луна, Титан). Именно для этих объектов отклонение света учитывается при идущей сейчас разработке программ обработки результатов наблюдений “Gaia”.