

**XIX Санкт-Петербургская  
астрономическая олимпиада**  
практический тур, решения

**2012**  
**11**  
**марта**

---

*10 класс*

---

К середине XVIII века астрономы смогли определить расстояния в Солнечной системе в относительных единицах. Были известны большие полуоси орбит планет, эксцентриситеты орбит и т.д., но не было известно значение астрономической единицы — большой полуоси орбиты Земли вокруг Солнца — в «обычных» единицах (милях, верстах, еще не введенных тогда километрах и т.п.). Поэтому на прохождения Венеры по диску Солнца, состоявшиеся в 1761 и 1769 годах, возлагались большие надежды — наблюдения прохождений позволили определить значение астрономической единицы с достаточно высокой точностью.

Ваша задача:

- А) разработать и описать метод определения величины астрономической единицы по наблюдениям прохождения Венеры по диску Солнца;
- В) оценить точность результата, который мог быть получен этим методом в середине XVIII века, если известно, что погрешность угломерных измерений составляла несколько угловых секунд, а относительная погрешность часов составляла  $10^{-6}$ .
- С) можно ли использовать для той же цели Меркурий? В чем преимущества и недостатки использования Меркурия по сравнению с Венерой?

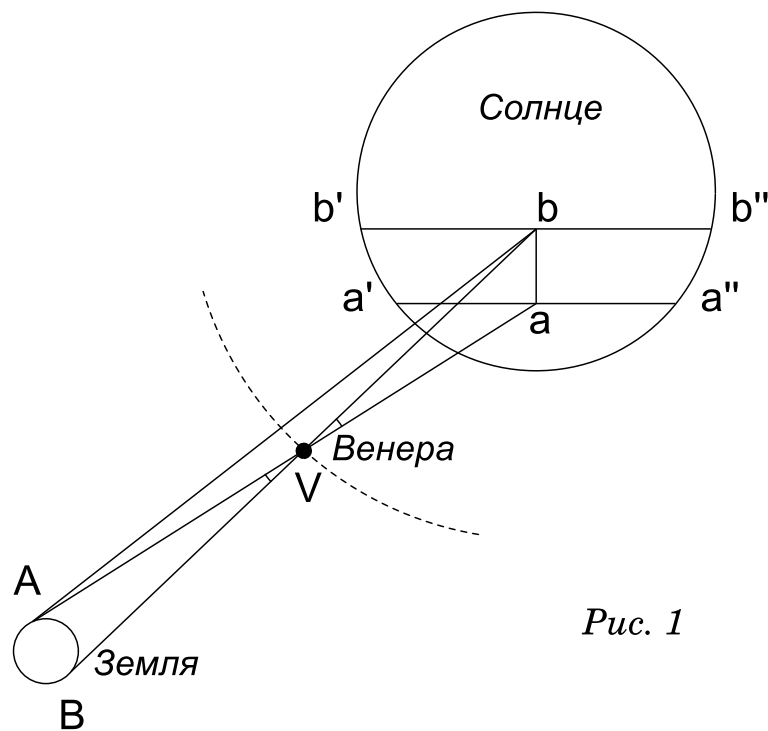
**Решение:**

- А) Поскольку нужно получить расстояние от Земли до Солнца в «абсолютных» единицах, то необходимо это расстояние сравнить с каким-либо расстоянием, известным в таких единицах. Очевидно, что в XVIII веке таким расстоянием являлся только радиус Земли, а потому предлагаемый метод должен быть основан на явлении суточного параллакса.

Собственно параллактический метод — это метод, позволяющий измерить расстояние в абсолютных единицах до любого объекта, для которого наблюдается

параллактическое смещение, если известна длина базы в абсолютных единицах. Таким образом, в принципе, можно определять расстояние до Солнца, непосредственно измеряя его суточный параллакс. Однако эта задача очень сложная. Солнце находится слишком далеко от Земли, чтобы его параллакс можно было уверенно определить в XVIII веке (его средний суточный параллакс меньше  $9''$ ). К тому же Солнце является слишком сложным объектом для наблюдения: это не точечный объект, следовательно, положение его центра определяется не слишком хорошо, рядом с ним нет «опорных» неподвижных объектов, по отношению к которым можно было бы измерять его положение, а также оно оказывает сильное влияние на условия наблюдений (нагревание воздуха, инструмента и т.д.).

Если известны относительные расстояния до тел Солнечной системы, то, измерив параллакс любого из них, можно вычислить все расстояния в абсолютных единицах. Желательно, естественно, брать наиболее близкое к Земле тело (но не Луну — ее орбита известна существенно хуже, чем орбиты планет), т.к. чем меньше расстояние до объекта, тем больше его параллакс. В XVII веке с этой целью наблюдали Марс в моменты его противостояний, особенно великих. Однако Венера должна гораздо лучше подходить для определения параллакса, так как в моменты нижних соединений подходит к Земле ближе, чем Марс. Но определение параллакса Венеры в эти моменты довольно сложно, т.к. она при этом находится близко к Солнцу, что затрудняет наблюдения как ее самой, так и звезд сравнения, и, к тому же, в эти моменты Венера представляет собой узкий серп, что делает неуверенным определение положения центра ее диска. В свете этого само по себе прохождение Венеры по диску Солнца представляет благоприятную возможность измерить ее параллакс. В этот момент Венера наиболее близка к Земле и представляет собой четко очерченный черный кружок на фоне солнечного диска. Так как Солнце само обладает достаточно большим параллаксом, который, собственно, и требуется найти, то наблюдая прохождение Венеры из разных точек земной поверхности, и измеряя положения Венеры относительно солнечного диска, можно определить разность параллаксов Венеры и Солнца. Отсюда, зная отношение расстояний до них (по условию, они известны), можно определить абсолютные расстояния до Венеры и до Солнца.

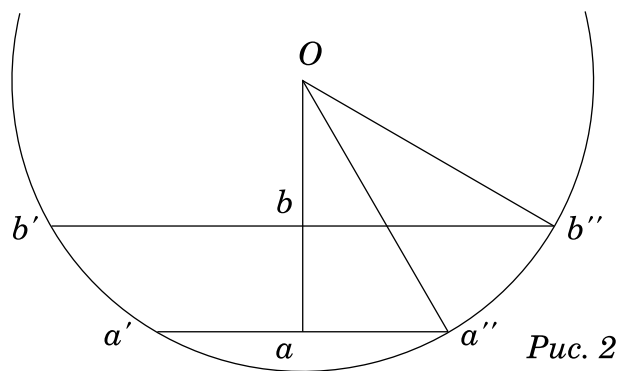


Венера для наблюдателей, находящихся в разных точках Земли, проходит по диску Солнца немного разными путями (см. рисунок 1, который для наглядности сильно преувеличивает этот эффект). Удобнее рассматривать движение Венеры относительно Солнца (т.е. в предположении, что Земля неподвижна). Пусть, для простоты, наблюдатели на Земле находятся в диаметрально противоположных точках  $A$  и  $B$ , и диаметр  $AB$  перпендикулярен плоскости эклиптики (это нужно, чтобы не учитывать вращение Земли вокруг своей оси). В некоторый определенный момент для наблюдателя, находящегося в точке  $A$ , Венера будет проецироваться в точку  $a$ , а в точке  $B$  — в точку  $b$ . Если оба наблюдателя смогут точно определить положения точек  $a$  и  $b$  относительно Солнца, можно будет определить длину дуги  $ab$ . Так как и  $AB$ , и  $ab$  перпендикулярны плоскости эклиптики, они параллельны друг другу. Отсюда получается, что  $AB : ab = bV : VB$ , где  $bV$  — расстояние от Солнца до Венеры, а  $VB$  — расстояние от Венеры до Земли. Отношение этих величин известно, т.к. известна большая полуось Венеры в астрономических единицах ( $\approx 0.7$ ). Получается, что  $AB : ab \approx 3 : 7$ . Таким образом, дуга  $ab$  на поверхности Солнца занимает место в  $7/3 \approx 2.3$  раза больше земного диаметра. Соотношение останется таким же, если выразить обе дуги в угловых величинах. Следовательно, угол  $bAa$  в 2.3 раза больше угла  $AbB$ . Но угол  $AbB$ , по определению, есть удвоенный параллакс Солнца. Отсюда видно, что любая ошибка, сделанная при измерении дуги  $ab$ , приводит к ошибке в определении параллакса Солнца примерно в 5 раз меньшей, что является большим преимуществом такого

способа оценки параллакса.

Итак, дело сводится к измерению длины дуги  $ab$  при наблюдении из разных точек Земли. Самое очевидное решение состоит в том, что наблюдатели по отдельности могут определить путем угломерных наблюдений положения точек  $a$  и  $b$  относительно центра либо краев Солнца, а затем, сравнив результаты, вычислить длину дуги  $ab$ . Однако в XVIII веке такие наблюдения не могли быть выполнены с достаточной степенью точности. В то время погрешность угловых измерений составляла несколько угловых секунд. При том, что параллакс Солнца составляет примерно  $9''$ , при таком измерении его значение можно было бы получить с относительной погрешностью в несколько процентов, что не очень хорошо. К тому же, и это даже более важно, определять положение точек нужно в один и тот же физический момент времени для двух наблюдателей. Это требует точнейшей синхронизации часов, чего в те времена не умели делать, и точного знания долгот мест наблюдений, что также не было известно.

Нужно найти другой путь оценки  $ab$ , по возможности, не использующий угломерные наблюдения и позволяющий избежать синхронизации часов. Если внимательно посмотреть на рисунок 1, можно заметить, что длины хорд, по которым движется Венера по диску Солнца различаются для разных наблюдателей. Соответственно различаются длительности полных проходов. Теория движения Венеры к XVIII веку была уже достаточно хорошо разработана, были составлены таблицы ее положений. Поэтому из длительности проходов с хорошей точностью можно было вычислить угловые длины хорд. А измерение длительности прохождения, т.е. разницы моментов первого и последнего касания диска Венеры краев диска Солнца, может быть выполнено каждым наблюдателем в отдельности с очень хорошей точностью. Причем здесь не потребуется синхронизация часов, на результат может повлиять лишь погрешность самих часов, которую можно рассчитать отдельно. Измерив угловые длины хорд, и зная угловой радиус Солнца, можно очевидным образом получить угловое расстояние между хордами. Действительно (см. рис. 2),  $ab = Oa - Ob$ , при этом  $Oa^2 = (Oa'')^2 - (aa'')^2$ , а  $Ob^2 = (Ob'')^2 - (bb'')^2$ .



Этот метод впервые разработал и описал Эдмунд Галлей в 1677 году после наблюдения прохождения Меркурия по диску Солнца. Метод идеологически простой и очень хороший, но требует тщательного выбора мест наблюдения. Нужно, чтобы разность в длительностях была как можно большей, но при этом требуется, чтобы из обоих мест наблюдения прохождение было видно целиком. Можно заметить, что для разных мест наблюдения различаются не только длительности прохождения, но и моменты касания Венерой краев Солнца. Так что метод (с более сложными вычислениями) можно модифицировать для ситуации, когда видно не все прохождение, а какой-нибудь один из моментов касания. Однако тогда потребуется синхронизация часов и знание долгот, поэтому такой метод смогли применить при наблюдении прохождений Венеры только в конце XIX века.

В) Так как можно считать, что угловая скорость движения Венеры известна «абсолютно» точно, то относительная погрешность определения параллакса равна относительной погрешности определения разности прохождений. Так как наблюдения были глазомерными, то реальная минимальная абсолютная погрешность, с которой наблюдатель мог засечь момент контакта, составляет около 0.1 с (предельное временное разрешение органов чувств человека), а, следовательно, длительность определяется не точнее, чем 0.2 с. Чтобы оценить относительную погрешность, нужно оценить длительность прохождения. Сидерический период обращения Венеры составляет  $\sqrt{(0.7)^3} \approx 0.6$  года. Следовательно, угловая скорость движения Венеры по орбите примерно равна  $1/0.6 \approx 1.7^\circ/\text{сутки}$ . Угловой диаметр Солнца при наблюдении с Венеры примерно равен  $0^\circ.5/0.7 \approx 0^\circ.7$ . Следовательно, прохождение Венеры по диску Солнца будет длиться примерно  $0.7/1.7 \approx 0.4$  суток, или около 10 часов (на самом деле, конечно, меньше, т.к. прохождение чаще всего не центральное). Тогда относительная погрешность измерения длительности прохождения в лучшем случае составит  $0.2/(10 \cdot 3600) \approx 5 \cdot 10^{-6}$ . Это, конечно, чрезвычайно оптимистичная оценка.

На самом деле точность определения моментов контактов гораздо хуже, т.к. любые явления, происходящие на Солнце, тяжело наблюдать из-за влияния земной атмосферы, разогревающейся под лучами Солнца. По-видимому, погрешность определения моментов контакта не меньше, чем 1 с, а, следовательно, для продолжительности — не менее 2 с. Для того, чтобы, зная продолжительности, вычислить параллакс, необходимо найти их разности, что дополнительно ухудшает точность, т.к. вычитаются близкие числа.

Поэтому можно попробовать оценить погрешность следующим образом. Можно считать, что суммарная абсолютная погрешность измерения разности длительностей прохождений составляет несколько секунд. Чтобы оценить относительную погрешность, нужно оценить разность длительностей прохождения для разных точек Земли. Венера движется по своей орбите со скоростью около 35 км/с (это довольно легко сосчитать, зная радиус (большую полуось) и период). Полутень Венеры на орбите Земли будет двигаться с такой же угловой скоростью. Земля находится в  $1/0.7 \approx 1.4$  раза дальше от Солнца, поэтому линейная скорость движения полутени составит  $35 \cdot 1.4 \approx 50$  км/с. Земля по орбите движется в ту же сторону со скоростью 30 км/с, так что скорость полутени относительно Земли будет около 20 км/с. С такой скоростью полутень пройдет диаметр Земли примерно за  $12\,800/20 = 640$  с, или чуть больше, чем за 10 минут. Таким образом моменты контактов для разных мест Земли могут отличаться примерно на 10 минут, следовательно, длительности прохождений отличаются примерно на 20 минут. Отсюда относительная погрешность определения разности длительностей, а, следовательно, и параллакса Солнца, составит примерно несколько десятых процента, что на порядок лучше, чем при измерении углов.

С) Прохождения Меркурия использовать можно, но нецелесообразно, т.к. Меркурий дальше от Земли и его параллакс меньше параллакса Венеры примерно в 2 раза. Но зато у Меркурия нет атмосферы, что несколько облегчает регистрацию моментов его контактов с краями Солнца.