Решения задач

Районный тур — Санкт-Петербург

11 класс

21. К сожалению, условие этой задачи можно истолковать двояко (что было замечено слишком поздно). Поэтому у задачи есть два решения, каждое из которых при проверке признается правильным.

В обоих случаях выражаем светимости Солнца и Луны через их радиусы и температуры как

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4,$$
$$L_☾ = 4\pi R_☾^2 \sigma T_☾^4,$$

где R со значками обозначены радиусы, T — температуры, σ — постоянная Стефана-Больцмана. Теперь возможны варианты:

Предполагается, что Луна светит так же ярко *<u>для земного наблюдателя</u>*. Тогда освещенность, создаваемая каждым из объектов на Земле, может быть вычислена как

$$E = \frac{L}{4\pi r^2},$$

где r — расстояние от объекта до Земли. Приравнивая освещенности, сокращая одинаковые множители в обеих частях уравнения и извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем:

$$\frac{R_☾}{r_☾} T_☾^2 = \frac{R_\odot}{r_\odot} T_\odot^2.$$

Однако отношение R/r для каждого из тел — это его угловой радиус, выраженный в радианах. Так как размеры Луны и Солнца на земном небе примерно совпадают, то эти отношения справа и слева равны. Отсюда получаем конечный результат: температура такой Луны будет совпадать с температурой Солнца, т.е. составит примерно $6 \cdot 10^3$ K.

Предполагается, что *<u>светимости</u>* *Луны и Солнца одинаковы.* Тогда приравнять можно два выражения для светимостей. После упрощения получаем:

$$R_☾ T_☾^2 = R_\odot T_\odot^2,$$

и отсюда

$$T_☾ = T_\odot \sqrt{\frac{R_\odot}{R_☾}}.$$

Отношение радиусов Солнца и Луны можно найти, зная, что их угловые размеры на Земле совпадают, а расстояние до Солнца примерно в 400 раз больше, чем до Луны. Тогда температура такой Луны будет больше температуры Солнца в $\sqrt{400} = 20$ раз и составит около 10^5 K.

22. Для оценки плотности черной дыры, очевидно, необходимо каким-то образом оценить ее массу и объем (т.е. радиус).

Масса оценивается из III закона Кеплера. Так как нам известны большая полуось орбиты звезды a и период ее обращения P, то масса черной дыры может быть выражена из соотношения

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Радиус R черной дыры можно оценить, зная, что черную дыру не могут покинуть никакие объекты, даже фотоны. Из этого следует, что вторая космическая скорость для черной дыры совпадает со скоростью света, т.е.

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Отсюда получаем выражение для радиуса черной дыры (т.н. «гравитационного радиуса»):

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

(интересно отметить, что, хотя черная дыра и является сугубо релятивистским объектом, наш результат, полученный в рамках классической механики, является точным).

Тогда, собирая все выражения, получаем, что средняя плотность черной дыры составляет

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3c^6 P^4}{512\, G\pi^5 a^6}.$$

После перевода данных в какую-то общую систему единиц и подстановки численных значений получаем результат — $\rho \approx 10^6$ кг/м^3.

23. Кульминация звезды — это момент пересечения звездой в процессе суточного движения плоскости меридиана. В северном полушарии Земли нижняя кульминация звезды (наиболее низкое ее положение относительно горизонта) может происходить только с северной стороны от зенита (астрономический азимут любого светила в нижней кульминации равен 180°), а верхняя кульминация — как с южной, если широта места φ больше склонения звезды δ (тогда азимут светила в верхней кульминации равен 0°), так и с северной, если $\delta > \varphi$ (азимут равен 180°).

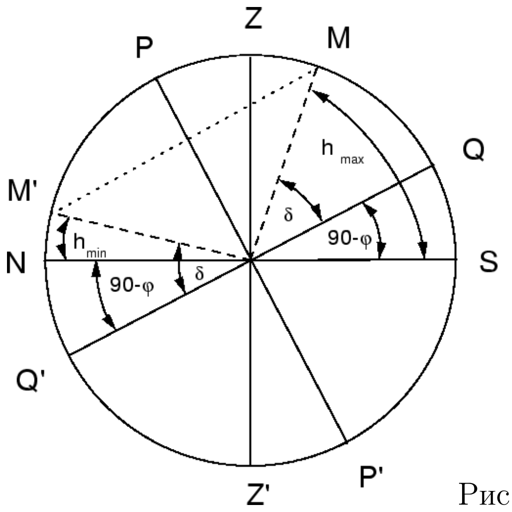

Рис. 1

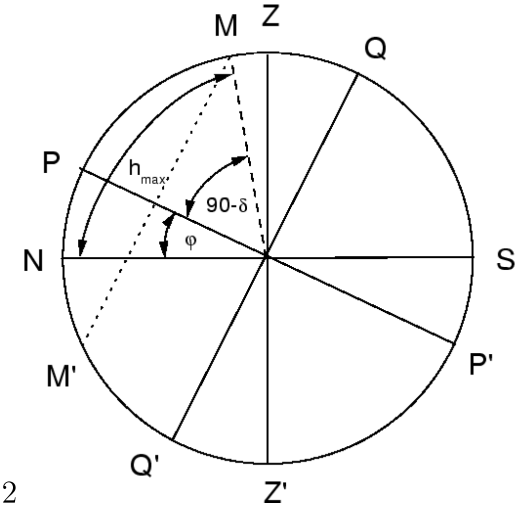

Рис. 2

Рассмотрим рисунки 1 и 2, изображающие небесную сферу в проекции на плоскость меридиана. Обозначения: SN — горизонт, S — точка юга, N — точка севера, QQ' — небесный экватор, MM' — суточная параллель (видимый суточный путь) звезды, P — северный полюс мира, Z — зенит, h_{max} — высота светила над горизонтом в верхней кульминации, h_{min} — высота в нижней кульминации. Зенитное расстояние — расстояние от зенита до звезды равно $z = 90° - h$.

Рисунок 1 относится к случаю верхней кульминации к югу от зенита. В этом случае $h_{max} = 90° - \varphi + \delta$. В случае верхней кульминации к северу от зенита (рис. 2) $h_{max} = 90° - \delta + \varphi$. И в обоих случаях $h_{min} = \delta + \varphi - 90°$

Отсюда получаем две системы уравнений:

$$(1)\begin{cases} z_{max} = \varphi - \delta \\ z_{min} = 180° - \varphi - \delta \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} z_{max} = \delta - \varphi \\ z_{min} = 180° - \varphi - \delta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(1)\begin{cases} 1 = \varphi - \delta \\ 3 = 180° - \varphi - \delta \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 1 = \delta - \varphi \\ 3 = 180° - \varphi - \delta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(1)\begin{cases} \varphi = 89° \\ \delta = 88° \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \varphi = 88° \\ \delta = 89° \end{cases}$$

В южном полушарии все аналогично (это легко показать, нарисовав соответствующие рисунки, поэтому появляется еще два варианта:

$$(3)\begin{cases} \varphi = -89° \\ \delta = -88° \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} \varphi = -88° \\ \delta = -89° \end{cases}$$

24. Как известно, угловой размер объекта α, выраженный в радианах, связан с линейным размером изображения в фокальной плоскости l соотношением $l = \alpha \cdot F$, где F — фокусное расстояние. Угловой размер изображения $\alpha = 20' = (1/3)^\circ \approx (1/3) \cdot (1/60)$ радиана, поэтому линейный размер матрицы составит $\approx 2.5/180$ м, т.е. около 1.4 см. Отсюда размер одного пиксела — около 14 мкм.

25. Как известно, перицентрическое расстояние (расстояние от фокуса эллипса (т.е. в нашем случае от Солнца) до наиболее близкой к нему точки орбиты) можно определить следующим образом:

$$r_\pi = a(1 - e),$$

где a — большая полуось орбиты, e — ее эксцентриситет. Апоцентрическое расстояние (до наиболее далекой от него точки орбиты)

$$r_\alpha = a(1 + e).$$

Тогда

$$e = \frac{\frac{r_\alpha}{r_\pi} - 1}{\frac{r_\alpha}{r_\pi} + 1}$$

Так как видимая звездная величина объекта и создаваемая им освещенность связаны как $m = -2.5 \lg E + \mathrm{const}$, то отношение освещенностей, создаваемых Солнцем на астероиде в перигелии и афелии, равно:

$$\frac{E_\pi}{E_\alpha} = 10^{0.4(m_\alpha - m_\pi)},$$

где E — освещенности, а m — соответствующие видимые звездные величины.

С другой стороны, освещенность, создаваемая объектом, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него, поэтому

$$\frac{E_\pi}{E_\alpha} = \left(\frac{r_\alpha}{r_\pi}\right)^2.$$

Таким образом

$$\frac{r_\alpha}{r_\pi} = 10^{0.2(m_\alpha - m_\pi)} = 10^{0.2(-16-(-18))} = 10^{0.4} \approx 2.5.$$

Отсюда

$$e = \frac{2.5 - 1}{2.5 + 1} \approx 0.43.$$

Районный тур — Ленинградская область

11 класс

46. Кроме звезды Процион все остальные звезды принадлежат созвездию Большая Медведица. **Процион** в данном случае лишний.

47. Расстояния различаются в $50/5 = 10$ раз. Т.к. видимый блеск обеих звезд одинаков, но при этом обратно пропорционален R^2, где R — расстояние до объекта, то светимость звезд отличается в $R^2 = 100$ раз, что соответствует разнице **на 5 звездных величин**.

48. Вспомним выражение для связи массы и энергии: $E = mc^2$, где E — полная энергия, m — масса, соответствующая этой энергии, c — скорость света.

Предполагая, что вся энергия, выделяющаяся в процессе термоядерного синтеза, идет на обеспечение светимости, можно рассчитать массу, необходимую для выделения этой энергии. Т.к. полная светимость Солнца $L = 3.8 \cdot 10^{26}$ Вт, то

$$m' = E/c^2 = 3.8 \cdot 10^{26}/(3 \cdot 10^8)^2 \approx 0.42 \cdot 10^{10}\,\text{кг}$$

Это масса, которая обеспечивает выделение энергии в течение 1 секунды. В течение года полная масса будет равна $m = 0.42 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7 \approx \mathbf{1.2 \cdot 10^{17}}$ **кг**.

49. Максимальная скорость для звезд скопления не может быть больше, чем скорость убегания, или 2-я космическая скорость для «поверхности» скопления. Полная масса скопления 800 масс Солнца, или $M = 800 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 1.6 \cdot 10^{33}$ кг. Радиус скопления 6 св. лет, или, переводя в метрическую систему, $L = 6 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^7 \approx 5.4 \cdot 10^{16}$ м.

Скорость убегания определяется формулой $V = (2GM/R)^{1/2}$. Подставим числа:

$$V = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.6 \cdot 10^{33}}{5.4 \cdot 10^{16}}\right)^{1/2} \approx 2 \cdot 10^3\,\text{м/с} \approx \mathbf{2\,км/с.}$$

50. Орбита МКС низкая: несколько сотен километров над поверхностью Земли, допустим, что около 400 км, тогда радиус орбиты будет равен примерно 6 800 км. Полный оборот вокруг Земли станция выполняет за время $T = L/V$, где L — длина пути, V — скорость. $L = 2\pi R \approx 43\,000$ км. $V = (GM/R)^{1/2} \approx 7.7$ км/с. Отсюда $T \approx 5600$ секунд.

Диск полной Луны соответствует $0^\circ.5$. Тогда $t = T \cdot 0.5/360 = 5600 \cdot 0.5/360 \approx$ **7.7 секунды**.