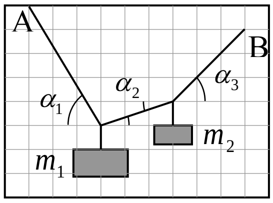
Решения и критерии оценивания



1. Пусть сила натяжения участка нити от точки А до груза m_1 равна T_1, между грузами - T_2, от груза m_2 до точки В - T_3. Тогда (поскольку силы натяжения нитей, к которым привязаны грузы, вертикальны

$$T_1\cos\alpha_1 = T_2\cos\alpha_2 = T_3\cos\alpha_3$$

где углы α_1, α_2 и α_3 - углы между нитями и горизонталью (см. рисунок). Отсюда

$$T_2 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}T_1 \text{ и } T_3 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}T_1$$

Условия равновесия грузов дают

$$m_1 g = T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 = T_1\cos\alpha_1\left(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2\right)$$

$$m_2 g = T_3\sin\alpha_3 - T_2\sin\alpha_2 = T_1\cos\alpha_1\left(\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2\right)$$

Отсюда находим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2}$$

Из рисунка (по клеточкам) находим

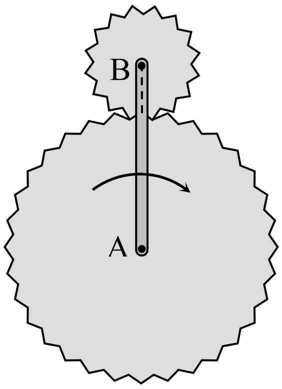
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{5}{3},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{3},\ \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{3}{3}$$

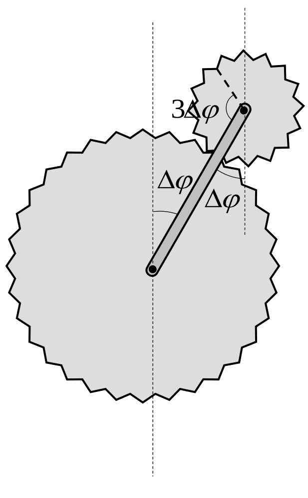
Поэтому

$$\frac{m_1}{m_2} = 3$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные условия равновесия для горизонтальных проекций сил – 0,5 балла.
2. Правильные условия равновесия для вертикальных проекций сил – 0,5 балла.
3. Правильно найдены (из рисунка) тригонометрические функции углов наклона нитей – 0,5 балла
4. Правильный ответ для отношения масс – 0,5 балла.

2. Поскольку зубья колес одинаковы, то длина окружности и радиус R большого колеса в три раза превосходят длину окружности и радиус r малого: $R = 3r$.



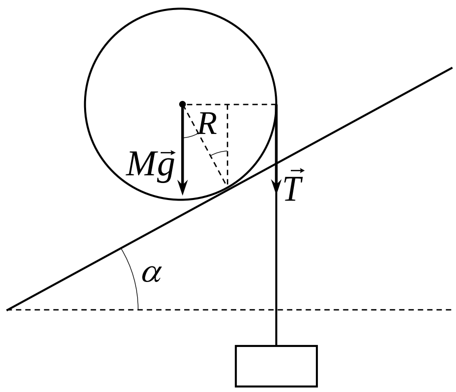


Пусть в начальный момент времени колеса касались так, как это показано на левом рисунке и пусть за некоторый момент времени кривошип АВ повернулся на угол $\Delta\varphi$ (правый рисунок). Тогда нижняя точка малого зубчатого колеса пройдет путь $3r\Delta\varphi$. И следовательно, радиус малого колеса, направленный в точку касания с большим колесом в первый момент времени, повернется на угол $3\Delta\varphi$ по отношению к новому положению точки касания (см. рисунок; соответствующий радиус малого колеса показан на рисунке пунктиром). А поскольку сама точка касания повернется на угол $\Delta\varphi$, то поворот малого колеса составит угол $4\Delta\varphi$.

Когда кривошип сделает полный оборот (повернется на угол 2π) малое колесо повернется на угол 8π, т.е. сделает четыре оборота вокруг своей оси. Следовательно, если кривошип сделает n оборотов вокруг центра большого колеса, то малое колесо сделает $4n$ оборотов вокруг своей оси.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная связь радиусов колес – 0,5 балла.
2. Правильный метод нахождения поворота малого колеса – равенство длин дуг большого и малого колес между двумя парами точек касания колес – 0,5 балла.
3. Правильная связь углов поворота – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.

3. Цилиндр будет подниматься вверх, если момент силы натяжения нити $T = mg$, связанной с телом массой m M_T, будет больше момента силы тяжести цилиндра M_{Mg} относительно точки касания цилиндра и плоскости



$$M_{Mg} \le M_T$$

Находя плечи соответствующих сил относительно точки касания цилиндра и плоскости (см. рисунок), получим условие движения цилиндра вверх

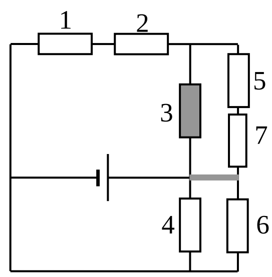
$$MgR\sin\alpha \le mg\left(R - R\sin\alpha\right)$$

где $M = 4m$ масса цилиндра. Отсюда получаем условие на угол наклона плоскости, при котором цилиндр будет двигаться вверх

$$\sin\alpha \le \frac{m}{M+m} \qquad \text{или} \qquad \alpha \le \arcsin\left(\frac{m}{M+m}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) = 11{,}5^\circ$$

(условие уменьшения энергии системы при подъеме – большее уменьшение потенциальной энергии тела при опускании, чем потенциальной энергии цилиндра при подъеме приводят к тому же результату). Отметим, что от радиуса цилиндра ответ не зависит.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная основная идея решения – сравнение моментов силы тяжести и силы натяжения нити относительно точки касания цилиндра (или сравнение увеличения-убыли потенциальной энергии цилиндра и тела) – 0,5 балла.
2. Правильные формулы для момента силы – 0,5 балла.
3. Правильные плечи сил тяжести и силы натяжения – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.



4. Источником тока в этой цепи является омметр, поскольку омметр – прибор для измерения сопротивлений - содержит источник тока. Омметр работает так: он подает электрическое напряжение на исследуемый резистор и измеряет силу тока, протекающего через резистор, и напряжение на этом резисторе. А потом по закону Ома вычисляет его сопротивление. Далее. Поскольку сопротивления амперметров пренебрежимо малы, данная цепь эквивалентна цепи, показанной на рисунке, на котором вольтметры обозначены как обычные резисторы (цифры соответствуют индексу в обозначении вольтметра в условии задачи), а амперметры заменены идеальными проводниками. На этом рисунке выделен резистор 3 (вольтметр V_3) напряжение на котором (согласно условию) составляет $U=1$ В и тот участок цепи (амперметр A_4), через который течет ток $I=1$ мкА. Таким образом, заданная цепь приближенно эквивалентна цепи, в которой источник тока замыкается через две ветви, причем сопротивление верхней ветви

$$R_{верх}=R_V+R_V+\frac{2R_V}{3}=\frac{8}{3}R_V$$

в шестнадцать третьих раз больше сопротивления нижней ветви

$$R_{нижн}=\frac{1}{2}R_V$$

(R_V - сопротивление вольтметра), а поскольку напряжения на верхней и нижней ветвях одинаковы, то токи через верхнюю и нижнюю ветви цепи связаны соотношением

$$I_{нижн}=\frac{16}{3}I_{верх} \qquad (*)$$

С другой стороны. Пусть ток через вольтметр 3 равен I_3. Так как сопротивления всех вольтметров одинаковы, а напряжение на вольтметрах 5 и 7 такое же, как на вольтметре 3, через вольтметры 5 и 7 течет ток $I_3/2$. Тогда

$$I_{верх}=\frac{3}{2}I_3$$

а через вольтметр 6 течет ток

$$I-\frac{I_3}{2}$$

Такой же ток течет и через вольтметр 4 (на вольтметрах 4 и 6 одинаковое напряжение). Поэтому

$$I_{нижн}=2I-I_3.$$

Из формулы (*) получаем

$$2I-I_3=\frac{16}{3}\frac{3}{2}I_3=8I_3$$

Отсюда находим ток через вольтметр 3

$$I_3=\frac{2}{9}I$$

и сопротивление вольтметра

$$R_V=\frac{U}{I_3}=\frac{9}{2}\frac{U}{I}=4,5\cdot 10^6 \text{ Ом}$$

Теперь можно найти токи через верхнюю и нижнюю ветви цепи

$$I_{верх}=\frac{1}{3}I\ ,\ I_{нижн}=\frac{16}{9}I$$

и ток через омметр I_Ω

$$I_\Omega = I_{верх} + I_{нижн} = \frac{19}{9} I$$

Напряжение на омметре можно найти, используя закон Ома для верхней или нижней ветви цепи

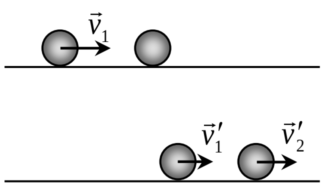
$$U_\Omega = I_{нижн} \frac{1}{2} R_V = I_{верх} \frac{8}{3} R_V = \frac{8}{9} I R_V$$

Поэтому показания омметра равны

$$R_\Omega = \frac{U_\Omega}{I_\Omega} = \frac{8}{19} R_V = \frac{36}{19} \frac{U}{I} = 1{,}89 \cdot 10^6 \text{ Ом}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное понимание того, где источник тока в данной цепи – 0,5 балла.
2. Правильная эквивалентная схема (для расчета токов и напряжений) с заменой амперметров идеальными проводниками – 0,5 балла.
3. Правильно найдено сопротивление вольтметра – 0,5 балла
4. Правильно найдено показание омметра – 0,5 балла.

5. Сначала исследуем вопрос об упругом столкновении шаров – без учета трения. Пусть один шар до столкновения покоился, второй имел скорость $\vec{v}_1$. Найдем скорости шаров после столкновения. Их определяет прежде всего закон сохранения импульса:



$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1{}' + m\vec{v}_2{}'$$

Здесь m - массы шаров (считаем, что они одинаковы), $\vec{v}_1{}'$, $\vec{v}_2{}'$ - скорости шаров после столкновения. Хотя закон сохранения импульса справедлив только для замкнутых систем (а система шаров – незамкнута), здесь он выполняется, поскольку внешние силы (силы тяжести и силы реакции стола) в любой момент времени компенсируют друг друга. Пусть, далее, столкновение центральное (скорость налетающего шара направлена по прямой соединяющей центры шаров). Тогда скорости шаров после столкновения могут быть направлены только вдоль этой же прямой. В этом случае закон сохранения импульса в проекциях на направление движение дает

$$v_1 = v'_{1,x} + v'_2 \tag{1}$$

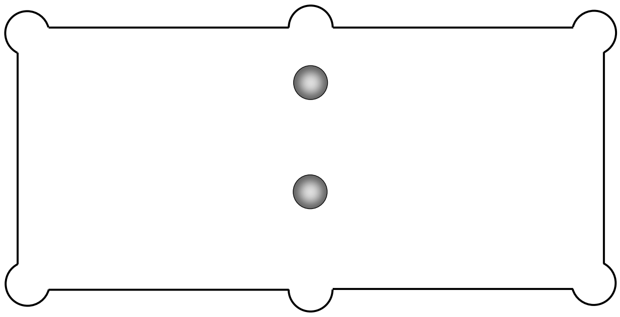
Поскольку бильярдные шары сделаны из упругого материала, механическая энергия в столкновении сохраняется. Поэтому

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_1^2 = v_{1,x}'^2 + v_2'^2 \tag{2}$$

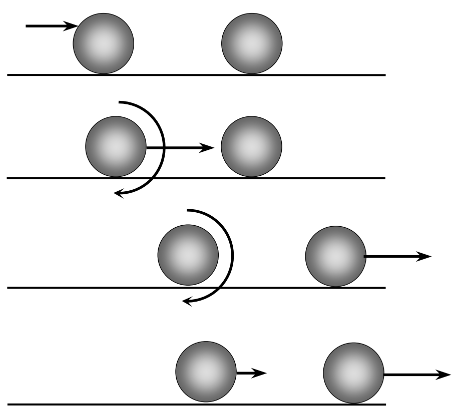
Решение системы уравнений (1)-(2) дает два набора корней

$$v'_{1,x} = v_1, \qquad v'_2 = 0$$
$$v'_{1,x} = 0, \qquad v'_2 = v_1$$

Первая пара корней отвечает начальному движению, то есть отсутствию столкновения. Результат столкновения шаров определяется второй парой корней: тот шар, что первоначально двигался, после центрального столкновения остановится. Тот, что покоился - станет двигаться точно с той же скоростью, что и первый до столкновения. Из опыта игры на бильярде мы знаем, что эта ситуация действительно имеет место – при центральных столкновениях: налетающий шар останавливается, а покоившийся начинает двигаться с той же скоростью.

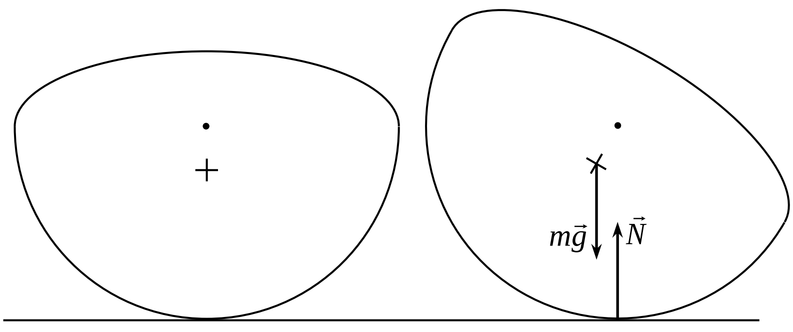


Но опытные бильярдисты знают: можно ударить так, что тот шар, которым мы бьем, тоже продолжит двигаться в том же направлении. А можно так, что ударный шар после столкновения будет двигаться назад. Такие удары используют, например, если два шара встают на одной прямой с двумя центральными лузами (см. рисунок). В этом случае можно забить сразу оба шара: или оба в ту лузу, в направлении которой наносится удар, или в обе по шару. Давайте рассмотрим такой удар, когда мы бьем выше центра шара (верхний рисунок).



Кроме поступательного движения удар и трение шара о поверхность стола заставят шар-биток (тот шар по которому наносится удар кием) вращаться, причем вращаться вперед, в направлении движения шара (второй сверху рисунок). А потом происходит столкновение. Но поскольку между шарами нет трения, шар-мишень вообще никак не может «почувствовать» вращение шара-битка. Поэтому для шара-мишени шар-биток как бы движется поступательно. Но в этом случае шар-биток передает свою скорость шару-мишени, а сам останавливается. Это значит, что после удара шар-мишень будет двигаться поступательно, а шар-биток стоять на месте и вращаться вперед (третий сверху рисунок). Если бы стол был гладким, он так бы стоял и вращался. Но между шарами и столом есть трение. Из-за трения шар-биток оттолкнется от шероховатостей стола и приобретет скорость, направленную вперед. Аналогично при ударе ниже центра шара-битка можно заставить его после удара двигаться назад.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Доказательство, что при лобовом упругом столкновении шаров одинаковых масс шары обмениваются скоростями - 0,5 балла
2. Правильная идея решения – вращение шаров и способ заставить их двигаться поступательно и вращаться (удар выше и ниже центра) – 0,5 балла
3. Правильное рассмотрение столкновения вращающихся шаров – 0,5 балла
4. Правильные ответы на оба вопроса – 0,5 балла



6. Чтобы тело, имеющее сферическую нижнюю поверхность и обладающее осевой симметрией находилось в равновесии на горизонтальной поверхности (см. левый рисунок) необходимо, чтобы его центр тяжести (отмечен крестиком на рисунке) находился ниже геометрического центра поверхности тела (отмечен кружком на рисунке). Действительно, при отклонении тела вправо (правый рисунок) сила тяжести, которая приложена к центру тяжести, окажется левее геометрического центра нижней поверхности, который будет лежать над точкой касания поверхности тела с горизонтальной поверхностью, и момент силы тяжести относительно точки касания вернет тело в первоначальное положение. Так же момент силы тяжести вернет тело назад и при его отклонении влево. Если же центр тяжести тела окажется выше геометрического центра нижней поверхности, то при отклонении тела момент силы тяжести будет и дальше выводить его от первоначального положения. Поскольку центр тяжести нижнего шара ваньки-встаньки лежит в его геометрическом центре, и есть дополнительные шары сверху, то центр тяжести ваньки-встаньки будет лежать выше геометрического центра нижнего шара, и ванька-встанька не будет устойчивым.

Найдем положение центра тяжести ваньки-встаньки (пока без прикрепленного снизу тела). Координата центра тяжести системы тел в некоторой системе координат определяется соотношением

$$X_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...} \qquad (1)$$

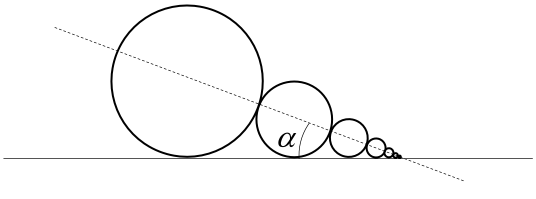
где $m_1, m_2, m_3, ...$ - массы частей, на которые можно разбить тело, $x_1, x_2, x_3, ...$ - координаты центров тяжести частей тела в этой системе координат. Найдем сначала массу ваньки-встаньки M. Поскольку радиусы шаров отличаются вдвое, то объем и, следовательно, массы отличаются в $2^3 = 8$ раз. Поэтому

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + ... = m + \frac{1}{2^3} m + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 m + ...$$

где $m_1, m_2, m_3, ...$ - массы шаров. Сумма в этой формуле образует геометрическую прогрессию со знаменателем 1/8. Поэтому

$$M = \frac{m}{1-(1/8)} = \frac{8m}{7} \qquad (2)$$

Сумма в числителе формулы (1) не сводится к простой геометрической прогрессии, поэтому для ее вычисления поступим следующим образом. «Положим» ваньку-встаньку «на бок» на поверхность (см. рисунок), найдем расстояние от поверхности до центра тяжести ваньки-встаньки и угол между поверхностью и прямой, проведенной от нижней точки ваньки-встаньки к его центру тяжести (угол α на рисунке).



Очевидно (благодаря тому, что каждый последующий шар вдвое меньше предыдущего), все шары будут касаться поверхности. Поэтому расстояние от центра тяжести каждого шара до поверхности равно его радиусу. Используя формулу (*), найдем расстояние d от поверхности до центра тяжести ваньки-встаньки

$$d = \frac{m_1 r + m_2(r/2) + m_3(r/4) + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...} \tag{3}$$

Сумма в знаменателе формулы (3) есть масса ваньки-встаньки (2). Сумма в числителе формулы (3) есть геометрическая прогрессия со знаменателем 1/16. Следовательно

$$d = \frac{mr\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{16}}}{\dfrac{8}{7}m} = \frac{14}{15}r \tag{4}$$

Поскольку центр тяжести ваньки-встаньки лежит на прямой, соединяющей центры шаров, то угол α между этой прямой и поверхностью (см. рисунок) можно найти как

$$\sin\alpha = \frac{r}{r + 2(r/2) + 2(r/4) + 2(r/8) + ...} = \frac{r}{2r\left(1 + (1/2) + (1/4) + ...\right) - r} \tag{5}$$

Сумма в скобках в знаменателе есть геометрическая прогрессия со знаменателем ½. Поэтому

$$\sin\alpha = \frac{1}{3} \tag{6}$$

Теперь легко найти расстояние от центра большого шара до центра тяжести ваньки-встаньки

$$l_c = \frac{r-d}{\sin\alpha} = \frac{r}{5} \tag{7}$$

Поэтому расстояние от нижней точки ваньки-встаньки (когда он стоял на горизонтальной поверхности) до его центра тяжести равно

$$L_c = r + l_c = \frac{6r}{5} \tag{8}$$

Теперь найдем массу тела, которую нужно прикрепить к нижней точки ваньки-встаньки, чтобы он был устойчивым. Для этого (как это было доказано выше) центр тяжести ваньки-встаньки с телом должен лежать ниже геометрического центра первого шара. Используя формулу (1), получим следующее условие равновесия ваньки-встаньки

$$\frac{ML_c}{M+\mu} \le r$$

Отсюда получаем для массы тела μ

$$\mu \ge M\frac{L_c - r}{r}$$

Используя теперь формулы (2) и (8) получим окончательно

$$\mu \ge \frac{8}{35}m$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильно объяснено, почему ванька-встанька неустойчив - 0,5 балла

2. Правильно вычислена масса ваньки-встаньки – 0,5 балла
3. Правильно найдено положение центра тяжести ваньки-встаньки – 0,5 балла
4. Правильный ответ для массы утяжеляющего тела – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.