Решения и критерии оценивания

1. Пусть сопротивление проводов равно r. Поскольку сопротивлением проводов можно пренебречь по сравнению с сопротивлением самой лампочки, можно считать, что напряжение на лампочке равно напряжению сети. Поэтому в лампочках в обоих случаях будет выделяться номинальная мощность. И, следовательно, в первом случае ток в цепи определяется соотношением, следующим из закона Джоуля-Ленца

$$I_1 = \frac{P_1}{U}$$

(U - напряжение сети), а мощность, выделяемая в соединительных проводах, равна

$$P_2 = I^2 r = \left(\frac{P_1}{U}\right)^2 r$$

Проводя аналогичные вычисления, найдем, что при включении лампочки номинальной мощностью P_3 в соединительных проводах будет выделяться мощность

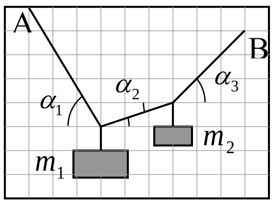
$$P_4 = \left(\frac{P_3}{U}\right)^2 r$$

Деля друг на друга две последние формулы, найдем

$$P_4 = P_2 \frac{P_3^2}{P_1^2} = 27{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное использование закона Джоуля-Ленца для мощности, выделяемой в лампе – 0,5 балла
2. Правильное нахождение сопротивления лампочки через ее номинальную мощность – 0,5 балла.
3. Правильное нахождение сопротивления соединительных проводов – 0,5 балла.
4. Правильный ответ (и буквенный, и числовой) – 0,5 балла.

2. Пусть сила натяжения участка нити от точки A до груза m_1 равна T_1, между грузами - T_2, от груза m_2 до точки B - T_3. Тогда (поскольку силы натяжения нитей, к которым привязаны грузы, вертикальны



$$T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T_3 \cos\alpha_3$$

где углы α_1, α_2 и α_3 - углы между нитями и горизонталью (см. рисунок). Отсюда

$$T_2 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} T_1 \text{ и } T_3 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3} T_1$$

Условия равновесия грузов дают

$$m_1 g = T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2 = T_1 \cos\alpha_1 \left(\text{tg}\alpha_1 + \text{tg}\alpha_2 \right)$$

$$m_2 g = T_3 \sin\alpha_3 - T_2 \sin\alpha_2 = T_1 \cos\alpha_1 \left(\text{tg}\alpha_3 - \text{tg}\alpha_2 \right)$$

Отсюда находим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathrm{tg}\alpha_1 + \mathrm{tg}\alpha_2}{\mathrm{tg}\alpha_3 - \mathrm{tg}\alpha_2}$$

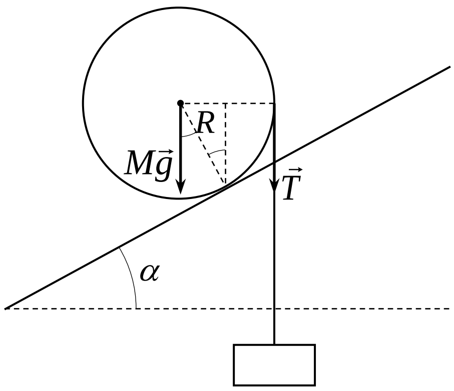
Из рисунка (по клеточкам) находим

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{5}{3},\ \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{1}{3},\ \mathrm{tg}\alpha_3 = \frac{3}{3}$$

Поэтому

$$\frac{m_1}{m_2} = 3$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные условия равновесия для горизонтальных проекций сил – 0,5 балла.
2. Правильные условия равновесия для вертикальных проекций сил – 0,5 балла.
3. Правильно найдены (из рисунка) тригонометрические функции углов наклона нитей – 0,5 балла
4. Правильный ответ для отношения масс – 0,5 балла.



3. Цилиндр будет подниматься вверх, если момент силы натяжения нити $T = mg$, связанной с телом массой m M_T, будет больше момента силы тяжести цилиндра M_{Mg} относительно точки касания цилиндра и плоскости

$$M_{Mg} \le M_T$$

Находя плечи соответствующих сил относительно точки касания цилиндра и плоскости (см. рисунок), получим условие движения цилиндра вверх

$$MgR\sin\alpha \le mg\left(R - R\sin\alpha\right)$$

Отсюда получаем условие на угол наклона плоскости, при котором цилиндр будет двигаться вверх

$$\sin\alpha \le \frac{m}{M+m} \qquad \text{или} \qquad \alpha \le \arcsin\left(\frac{m}{M+m}\right)$$

(условие уменьшения энергии системы при подъеме – большее уменьшение потенциальной энергии тела при опускании, чем потенциальной энергии цилиндра при подъеме приводят к тому же результату). Отметим, что от радиуса цилиндра ответ не зависит.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная основная идея решения – сравнение моментов силы тяжести и силы натяжения нити относительно точки касания цилиндра (или сравнение увеличения-убыли потенциальной энергии цилиндра и тела) – 0,5 балла.
2. Правильные формулы для момента силы – 0,5 балла.
3. Правильные плечи сил тяжести и силы натяжения – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.

4. Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые слои массой Δm_1, Δm_2, Δm_3 и т.д. настолько малые, что температуру внутри каждого слоя можно считать неизменной. Тогда уравнение теплового баланса для стержня дает

$$c\Delta m_1\left(T_x - T_1\right) + c\Delta m_2\left(T_x - T_2\right) + c\Delta m_3\left(T_x - T_3\right) + ... = 0$$

где T_x - установившаяся температура стержня, T_1, T_2, T_3 и т.д. – температуры слоев. Раскрывая в этом выражении скобки, получим

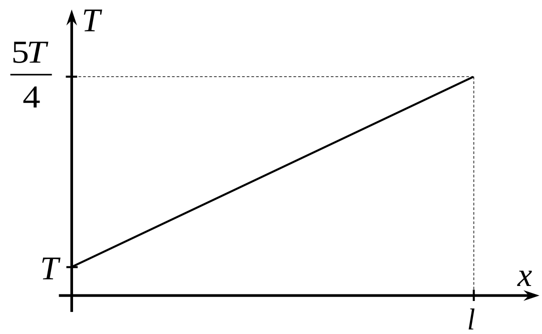
$$mT_x = \Delta m_1 T_1 + \Delta m_2 T_2 + \Delta m_3 T_3$$

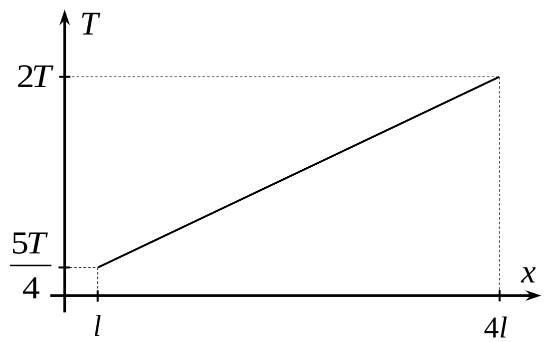
Масса каждого слоя Δm_i пропорциональна его длине Δx_i: $\Delta m_i = \lambda \Delta x_i$, где λ - масса единицы длины стержня. Поскольку стержни изготовлены из одного материала, а радиусы их сечения отличаются вдвое, то масса единицы длины тонкого стержня вдвое меньше массы единицы длины толстого. В результате уравнение теплового баланса можно переписать в виде

$$mT_x = \lambda\left(\Delta x_1 T_1 + \Delta x_2 T_2 + ...\right) + 4\lambda\left(\Delta x_1 T_1 + \Delta x_2 T_2 + ...\right) \qquad (*)$$

где λ - масса единицы длины тонкого стержня, первая сумма распространяется на те участки тела, которые принадлежат тонкому стержню, вторая – толстому.

Аналогичные (*) бесконечные суммы вычисляются графическим методом при нахождении работы переменной силы. Идея такого вычисления заключается в том, что суммы в скобках равны площади под графиком зависимости температуры T от длины стержня x. Графики зависимости температуры от длины стержня, отсчитанной от тонкого конца, для тонкого и толстого стержня показаны на левом рисунке и правом рисунке соответственно.





Здесь l - длина тонкого стержня, температура точки контакта стержней $5T/4$ найдена из условия линейности зависимости температуры стержня от его длины, на правом и левом графиках использованы разные масштабы. Находя площади под этими графиками, получим

$$\lambda\left(\Delta x_1 T_1 + \Delta x_2 T_2 + ...\right) + 4\lambda\left(\Delta x_1 T_1 + \Delta x_2 T_2 + ...\right) = \frac{165}{8}\lambda T l$$

Учитывая, что

$$m = \lambda l + 4\lambda 3l = 13\lambda l$$

получим из (*)

$$T_x = \frac{165}{104}T = 1{,}58T$$

Этот же ответ можно получить и по-другому. Из графического метода следует, что для линейного распределения температуры по однородному стержню его установившаяся температура будет равна полусумме температур его концов. Это значит, что если бы установилась температура только внутри тонкого стержня, она была бы равна

$$T_{тонк} = \frac{9T}{8}$$

Если бы установилась температура только внутри толстого стержня, она была бы равна

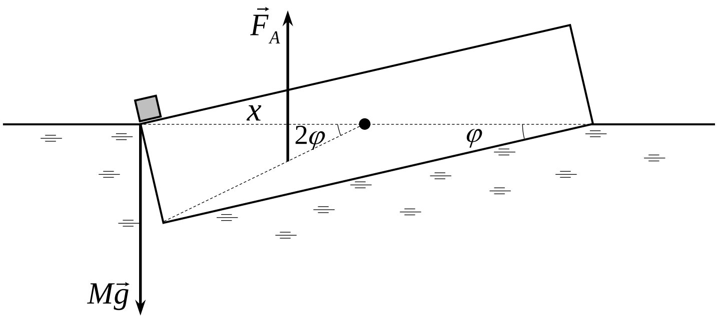
$$T_{толст} = \frac{13T}{8}$$

а поскольку масса тонкого стержня в 12 раз меньше толстого, установившаяся температура всего стержня определяется соотношением

$$T_x = \frac{\frac{9}{8}T + 12\frac{13}{8}T}{13} = \frac{165}{104}T = 1{,}58T$$

т.е. тот же ответ, что и при первом способе решения.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная основная идея решения – разбиение стержня на малые участки и использование уравнения теплового баланса (обоснование того что при линейном изменении температуры однородного стержня установится средняя температура) – 0,5 балла.
2. Правильное нахождение температуры большого стержня – 0,5 балла.
3. Правильное нахождение температуры малого стержня – 0,5 балла
4. Правильный ответ для установившейся температуры всего стержня – 0,5 балла.



5. В равновесном положении, показанном на рисунке, сумма всех сил и сумма моментов всех сил, действующих на плот, равны нулю. На плот действуют: сила тяжести $Mg = \rho gV$ (M - масса плота, V - его объем), сила Архимеда $\rho_0 gV_{п.ч.}$ (ρ_0 - плотность воды, $V_{п.ч.}$ - объем погруженной в воду части плота), сила со стороны тела mg. При заданном в условии положении плота плот погружен в воду ровно на половину своего объема. Поэтому первое условие равновесия дает

$$\rho gV + mg = \rho_0 g\frac{V}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{(\rho_0 - 2\rho)gV}{2} \qquad (*)$$

Используем теперь условие моментов. Будем вычислять моменты относительно центра плота. Тогда момент силы тяжести равен нулю. Момент силы, действующий на плот со стороны груза, равен

$$M_{mg}=mgx$$

(x - расстояние от центра плота до его края; см. рисунок). Сила Архимеда приложена к центру тяжести погруженного в воду объема плота; а поскольку сечение погруженной части есть треугольник, то точка приложения силы Архимеда лежит в точке пересечения медиан этого треугольника. По свойству прямоугольного треугольника его медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Поэтому точка пересечения медиан лежит на расстоянии $x/3$ от центра плота. Так как угол между диагоналями прямоугольника вдвое больше угла между диагональю и стороной (см. рисунок), то плечо силы Архимеда относительно центра плота равно

$$\frac{1}{3}x\cos 2\varphi$$

Поэтому условие моментов относительно центра плота дает

$$mgx=F_A\frac{1}{3}x\cos 2\varphi \qquad \Rightarrow \qquad m=\frac{\rho_0 V}{6}\cos 2\varphi=\frac{\rho_0 V}{6}\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right) \qquad (**)$$

Приравнивая (*) и (**), получим

$$\frac{\left(\rho_0-2\rho\right)gV}{2}=\frac{\rho_0 V}{6}\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right) \qquad (***)$$

Так как

$$\sin\varphi=\frac{h^2}{a^2+h^2}, \qquad \cos\varphi=\frac{a^2}{a^2+h^2}$$

то из формулы (***) имеем

$$\frac{1-z}{1+z}=\frac{3\left(\rho_0-2\rho\right)}{\rho_0}$$

где $z=h^2/a^2$. Отсюда находим

$$\frac{h}{a}=\sqrt{\frac{3\rho-\rho_0}{2\rho_0-3\rho}}$$

Проанализируем полученный результат. Поскольку $\rho<\rho_0/2$ (без груза плот погружен в воду менее, чем наполовину), то знаменатель положителен при любой плотности плота. Положительность числителя дает

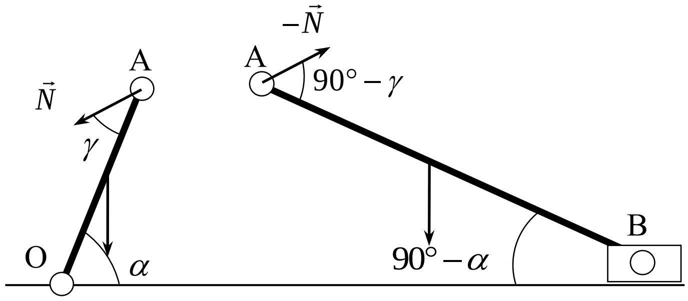
$$\rho>\frac{1}{3}\rho_0$$

При невыполнении этого неравенства плот не удастся расположить в воде так, как дано на рисунке в условии ни при какой массе груза. Поэтому ответ в задаче таков

$$\frac{h}{a}=\sqrt{\frac{3\rho-\rho_0}{2\rho_0-3\rho}}, \qquad \frac{1}{3}\rho_0<\rho<\frac{1}{2}\rho_0$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использование правильной формулы для силы Архимеда – 0,5 балла.

2. Использование правильного уравнения моментов (с правильной точкой приложения силы Архимеда – 0,5 балла.
3. Правильный ответ – 0,5 балла
4. Анализ возможности для плота занять положение, показанное на рисунке в условии задачи – 0,5 балла.



6. Определим силу, с которой кривошип действует на шатун (или шатун на кривошип) в шарнире А. Поскольку соединение кривошипа и шатуна шарнирное, то никаких общих соображений о направлении этой силы высказать нельзя – оно должно быть определено из условия равновесия системы. Пусть сила, действующая со стороны шатуна на кривошип, направлена под углом γ к кривошипу (см. левый рисунок). Тогда сила, действующая со стороны кривошипа на шатун, направлена противоположно, т.е. под углом $90° - \gamma$ по отношению к шатуну (см. правый рисунок). В результате условия равновесия кривошипа и шатуна (условия моментов относительно точек О и С) дают

$$mg\frac{OA}{2}\cos\alpha = N\ OA\sin\gamma \qquad\qquad mg\frac{AB}{2}\cos\left(90° - \alpha\right) = N\ AB\sin\left(90° - \gamma\right) \qquad (*)$$

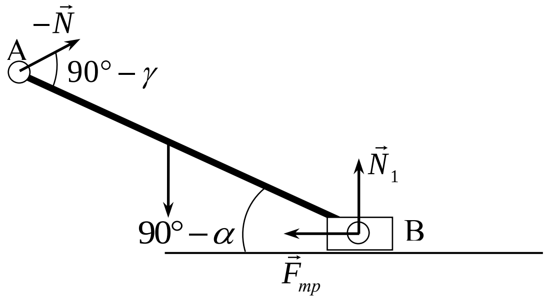
Деля первое уравнение на второе, получим

$$ctg\,\alpha = tg\,\gamma \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 90° - \alpha \qquad (**)$$

Теперь из любого из уравнений (*), найдем

$$N = \frac{1}{2}mg \qquad (***)$$

Теперь рассмотрим второе условие равновесия для шатуна АВ (уравнение сил; см. рисунок):



$$-\vec{N} + m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр} = 0$$

Из проекций этого уравнения на вертикальную и горизонтальную оси, находим

$$N_1 = mg - N\sin\left(\alpha - \gamma\right)$$
$$F_{тр} = N\cos\left(\alpha - \gamma\right)$$

Поскольку условием отсутствия скольжения является неравенство $F_{тр} \le \mu N_1$ (μ - коэффициент трения между ползуном и поверхностью), из этих уравнений и уравнения (**) получим

$$\mu \ge \frac{\cos\left(\alpha - \gamma\right)}{2 - \sin\left(\alpha - \gamma\right)}$$

Используя теперь уравнение (**), найдем

$$\mu \geq \frac{\sin 2\alpha}{2+\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная расстановка сил, действующих на кривошип и шатун – 0,5 балла.
2. Правильные уравнения моментов для кривошипа и шатуна – 0,5 балла.
3. Правильно найдена сила (и величина и направление) между шатуном и кривошипом – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.