Решения

1. Пусть объемы сосудов V, и в третьем сосуде содержится масса m_1 первой жидкости, m_2 второй. Тогда для масс и объемов жидкостей в третьем сосуде имеем

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 1,6m \\ \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} &= V \end{aligned} \qquad (1)$$

где ρ_1 и ρ_2 - плотности первой и второй жидкостей. С другой стороны, плотности жидкостей 1 и 2, очевидно, равны

$$\rho_1 = \frac{m}{V}, \ \rho_2 = \frac{1,8m}{V}$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение системы (1), получим

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 1,6m \\ 1,8m_1 + m_2 &= 1,8m \end{aligned} \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (2), находим

$$m_1 = 0,25m, \ m_2 = 1,35m$$

Поэтому во всех трех сосудах содержится масса

$$M_1 = m + 0,25m = 1,25m$$

первой жидкости и

$$M_2 = 1,8m + 1,35m = 3,15m$$

второй жидкости.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильные формулы, связывающие массу, объем и плотность тела – 0,5 балла.

2. Правильная формула для массы жидкости во втором сосуде через плотности жидкостей 1 и 2 – 0,5 балла.

3. Правильная система уравнений для масс первой и второй жидкостей – 0,5 балла

4. Правильные ответы – 0,5 балла.

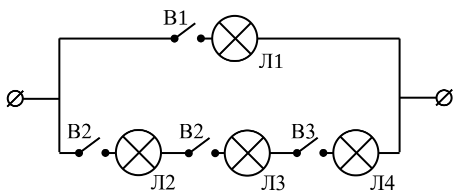
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. Первое. При отключении первого или второго выключателя (которые отключают первую или вторую лампу соответственно), хотя бы одна лампа в цепи горит, значит, цепь содержит параллельно соединенные элементы.

Второе. При отключении первого и второго выключателя (которые соединены последовательно с первой и второй лампой соответственно) в цепи выделяется разная мощность, значит, первая и вторая лампа включены в цепь по-разному.

Третье. Попробуем разные варианты включения ламп и выключателей такого типа.

Первый вариант. Допустим, лампы включены так, как показаны на рисунке. Тогда при отключении выключателя В2 (и включении других выключателей) погаснут и лампа 2, и лампа 3, и лампа 4. Поэтому мощность лампы 1 (и, следовательно, всех остальных ламп, поскольку по условию они одинаковые) при ее работе в бытовой сети равна $P_0 = 120$ Вт. Тогда в случае отключения



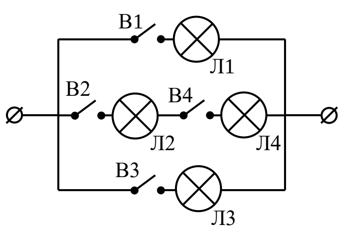
выключателя В1 (и включении других выключателей) будут гореть лампы 2, 3 и 4, причем напряжение, приложенное к каждой из них, составляет одну треть напряжения сети. Поэтому в каждой из них будет выделяться мощность

$$P_i' = \frac{(U/3)^2}{R} = \frac{1}{9}\frac{U^2}{R} = \frac{1}{9}P_0 = 13{,}333 \text{ Вт},$$

где U - напряжение сети, R - сопротивление лампы. Следовательно, во всех лампах будет выделяться мощность $P_1 = P_0/3 = 40$ Вт. А должна (по условию) выделяться мощность $P_1 = 90$ Вт; поэтому схема подключения ламп и выключателей – не такая.

Второй вариант. Очевидно, перемена местами ламп 1 и 2 не спасают положение, поскольку в этом случае номинальная мощность каждой лампы составляет $P_0 = 90$ Вт, и при выключении лампы 2 в цепи выделялась бы мощность $P_2 = P_0/3 = 30$ Вт. А должна (по условию) - $P_2 = 120$ Вт.

Третий вариант. Попробуем вариант подключения параллельно трех ветвей, причем в параллель со второй лампой включена еще одна лампа (например, 4). Схема такой цепи показана на рисунке.



В этом случае при отключении выключателя В2 (и включении других выключателей) горят лампы 1 и 3, к которым приложено напряжение сети, а лампы 2 и 4 не горят. Поэтому на лампах 1 и 3 выделяется номинальная мощность и $P_2 = 2P_0$. Следовательно, номинальная мощность ламп в этом случае равна

$$P_0 = \frac{P_2}{2} = 60 \text{ Вт}$$

Проверим, какая мощность будет выделяться при отключении выключателя 1 (и включении других выключателей). В этом случае гореть будут лампы 2, 3 и 4, причем к одной из них будет приложено напряжение сети, к двум другим, - половина напряжения сети. Поэтому в этих лампах будет выделяться мощность

$$P_1 = P_0 + 2\frac{(U/2)^2}{R} = P_0 + \frac{1}{2}\frac{U^2}{R} = P_0 + \frac{1}{2}P_0 = \frac{3}{2}P_0 = \frac{3}{4}P_2 = 90 \text{ Вт}$$

т.е. именно такая мощность, которая и должна выделяться по условию. Поэтому третий вариант подключения ламп подходит.

Четвертый вариант. Очевидно, перемена местами ламп 1 и 2 делает цепь не соответствующей условию задачи. Действительно, в этом случае между мощностями P_2 и P_1 должна была бы быть такая же связь как в предыдущем случае между P_1 и P_2: $P_2=(3/4)P_1=67,5$ Вт, а не 120 Вт.

Другие варианты. Очевидно, что никаких других вариантов подключения, совместимых с условием не существует. Поэтому правильный вариант подключения ламп и выключателей – третий.

Найдем теперь суммарную мощность, которая выделяется в цепи в этом варианте, в случае включения всех выключателей. В этом случае горят все четыре лампы, причем к двум из них приложено напряжение сети, к двум – половина напряжения сети. Поэтому в цепи выделяется следующая мощность

$$P=2P_0+2\frac{(U/2)^2}{R}=2P_0+\frac{1}{2}P_0=\frac{5}{2}P_0=\frac{5}{4}P_2=150\ \text{Вт}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильные формулы, связывающие напряжение в сети, сопротивление резистора и выделяемую на нем мощность – 0,5 балла.

2. Правильное нахождение выделяемой в цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов, через их номинальные мощности – 0,5 балла..

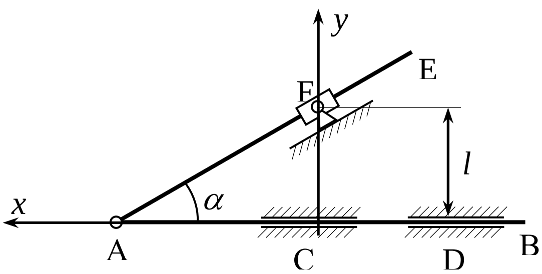
3. Перебор разных вариантов подключения элементов (через последовательное и параллельное соединения ламп) и выбор правильного варианта на основе данных условия задачи – 0,5 балла

4. Правильный ответ для мощности, выделяемой в цепи при включении всех выключателей – 0,5 балла.

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Выберем ось x системы координат в направлении штока, ось y перпендикулярно. Тогда зависимость координаты точки А от времени имеет вид

$$x_A(t)=x_0+vt$$



где x_0 - начальная координата точки А. С другой стороны

$$\frac{x_A(t)}{l}=\operatorname{ctg}\alpha$$

или

$$x_0+vt=l\operatorname{ctg}\alpha$$

Дифференцируя последнюю формулу по времени, получим

$$v=-\frac{l}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v}{l}\sin^2\alpha$$

(знак «минус» в этой формуле связан с тем, что угол α при движении стержня влево убывает). Поэтому для угловой скорости стержня получим

$$\omega = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \frac{v\sin^2\alpha}{l}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения: нахождение зависимости угла между стержнем и штоком от времени и дифференцирование этой зависимости (или рассмотрение малого перемещения точки А и нахождение изменения угла между стержнем и штоком) – 0,5 балла.

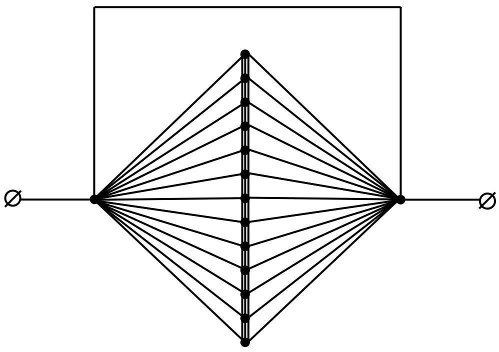
2. Правильная зависимость угла между стержнем и штоком как функция времени – 0,5 балла.

3. Дифференцирование этой зависимости – 0,5 балла

4. Правильный ответ для угловой скорости стержня – 0,5 балла.

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. После подключения к двум точкам цепи ее схема будет такой, как показано на рисунке. Между двумя крайними контактами (к которым подключен омметр) будут 2019 контактов, соединенных с крайними контактами проводами с одинаковыми сопротивлениями $r = 1$ Ом. Причем все промежуточные 2019 контактов будут соединены друг с другом. И еще один провод с сопротивлением $r = 1$ Ом соединяет крайние контакты напрямую (на рисунке этот провод показан отдельно). Очевидно, что благодаря симметрии цепи потенциалы всех промежуточных контактов одинаковы, и ток по соединяющим их проводам течь не будет. Это значит, что все проводники, соединяющие промежуточные контакты, можно выбросить без изменения цепи. Поэтому данная цепь представляет собой два контакта соединенными следующими параллельными проводниками – 2019 проводников с сопротивлением $r_1 = 2r = 2$ Ом и один проводник с сопротивлением $r = 1$ Ом. Поэтому эквивалентное сопротивление цепи R может быть найдено так



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r} = \frac{2019}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{2021}{2r}$$

Отсюда находим эквивалентное сопротивление цепи

$$R = \frac{2r}{2021}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильные формулы сложения сопротивлений при последовательном и параллельном включении резисторов – 0,5 балла.

2. Правильная эквивалентная схема цепи – 0,5 балла.

3. Доказательство, что все провода, соединяющие промежуточные узлы, можно выбросить без изменения ее электрических характеристик – 0,5 балла

4. Правильный ответ для эквивалентного сопротивления цепи – 0,5 балла.

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Пусть в некоторый момент времени диск и обруч занимают самое нижнее положение в трубе (как это показано на рисунке в условии задачи). Отметим на диске вертикальный радиус (жирный отрезок на рисунке 1), а также точку обруча, касающуюся в этот момент трубы (точка A на рисунке 1; чтобы лучше разглядеть эти обозначения труба, обруч и диск на рисунке 1 чуть-чуть раздвинуты). Тонким пунктирным отрезком показан вертикальный радиус трубы, крестиками и буквами O, O_1 и O_2 отмечены центры диска, обруча и трубы соответственно.

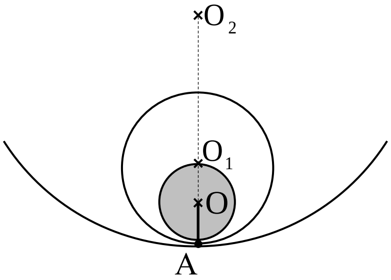


Рис. 1.

Пусть после этого момента прошел малый интервал времени Δt. Диск прокатится по внутренней поверхности трубы некоторое расстояние и повернет обруч. Поскольку проскальзывания диска по трубе и обручу и обруча по трубе по условию нет, диск и обруч повернутся на некоторые углы по часовой стрелке. Это положение показано на рисунке 2, на котором буквой B отмечена новая точка касания диска обруча и трубы, буквами A′ и A″ отмечены точки трубы и диска, которые касались точки обруча A в начальный момент, крестиками и буквами O, O_1 и O_2 (как и на рисунке 1) отмечены центры диска, обруча и трубы. Найдем углы поворота диска и обруча.

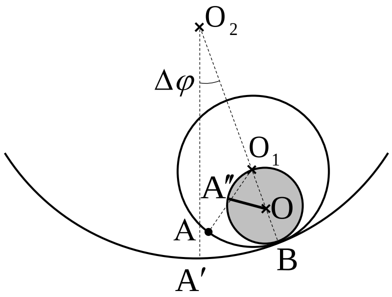


Рис. 2.

Из-за отсутствия проскальзывания длины дуг BA′, BA и BA″ равны друг другу. Поэтому если точка касания диска обруча и трубы повернулась на угол $\Delta\varphi$ по сравнению с начальным положением (рис. 2), то

$$\text{BA}'=\text{BA}=\text{BA}''=R\Delta\varphi$$

Следовательно,

$$\angle\,\text{BOA}''=\frac{R\Delta\varphi}{r},\ \angle\,\text{BO}_1\text{A}=\frac{R\Delta\varphi}{2r}$$

Отсюда находим углы поворота диска $\Delta\varphi_{д}$ и обруча $\Delta\varphi_{о}$ по сравнению с начальным положением (показанным на рисунке 1)

$$\Delta\varphi_{д} = \angle\,\mathrm{BOA''} - \Delta\varphi = \frac{R\Delta\varphi}{r} - \Delta\varphi = \frac{(R-r)\Delta\varphi}{r}$$
$$\Delta\varphi_{о} = \angle\,\mathrm{BO_1A} - \Delta\varphi = \frac{R\Delta\varphi}{2r} - \Delta\varphi = \frac{(R-2r)\Delta\varphi}{2r} \qquad (*)$$

Угол $\Delta\varphi$ можно связать со скоростью движения центра диска. Так как центр диска движется со скоростью v, то длина дуги Δl, связывающей старое и новое положение центра диска, с одной стороны, равна $v\Delta t$, с другой, выражается через угол поворота точки касания диска, обруча и трубы (и, следовательно, центра диска) $\Delta\varphi$

$$\Delta l = (R-r)\Delta\varphi\,.$$

Поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{v\Delta t}{R-r}$$

В результате из формулы (*) находим угловые скорости диска и обруча

$$\omega_{д} = \frac{\Delta\varphi_{д}}{\Delta t} = \frac{v}{r}, \qquad \omega_{о} = \frac{\Delta\varphi_{о}}{\Delta t} = \frac{(R-2r)v}{2r(R-r)}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

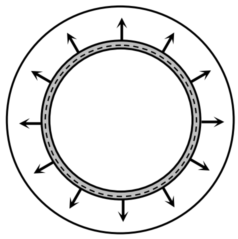
1. Правильная основная идея решения – одинаковость дуг поворота трубы, обруча и диска – 0,5 балла.

2. Правильные геометрические формулы, связывающие углы поворотов тел. Учет поворота центра диска при подсчете поворотов обруча и диска вокруг своей оси – 0,5 балла

3. Правильный ответ для угловой скорости диска – 0,5 балла.

4. Правильный ответ для угловой скорости обруча – 0,5 балла.

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям



6. Рассмотрим поток тепла через цилиндрическую поверхность радиуса x внутри цилиндра из отработанного топлива. В условиях теплового равновесия количество теплоты, проходящее через эту поверхность в единицу времени, равно количеству теплоты, выделяемому внутри цилиндра, ограниченного этой поверхностью. Поскольку всего в цилиндре длиной l в единицу времени выделяется количество теплоты $Q = q_l l$, а теплота выделяется равномерно по объему, то внутри рассматриваемого цилиндра выделяется количество теплоты

$$Q(x) = q_l l \frac{x^2}{R^2} \qquad (*)$$

С другой стороны, из закона теплопроводности Фурье следует, что чтобы через поверхность рассматриваемого цилиндра был поток тепла, в области его поверхности должен сформироваться градиент (изменение) температуры. Поэтому если взять тонкий цилиндрический слой толщиной

Δx около поверхности рассматриваемого цилиндра (выделен темной заливкой на рисунке, поверхность цилиндра радиуса x показана пунктиром), то на основании закона Фурье заключаем, что на внутренней и внешней поверхностях этого слоя должна быть такая разность температур ΔT, что

$$Q(x) = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} 2\pi x l$$

где λ - коэффициент теплопроводности стекла, $\Delta T = T_{внут} - T_{внеш}$ - разность температур внутренней и внешней поверхностей слоя, S - площадь поверхности слоя. Подставляя сюда величину $Q(x)$ из (*), получаем для разности температур на внутренней и внешней поверхностях рассматриваемого слоя

$$\Delta T = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x \Delta x$$

Аналогичные формулы можно написать для всех тонких слоев, на которые можно мысленно разбить цилиндр из отработанного топлива:

$$\Delta T_1 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_1 \Delta x_1$$

$$\Delta T_2 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_2 \Delta x_2$$

$$\Delta T_3 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_3 \Delta x_3$$

…………………..

Сложим теперь все эти формулы. Тогда сумма в левой части даст разность температур между центром цилиндра и его поверхностью. В правой части получится сумма, которую приходится вычислять при вычислении работы силы упругости и которую можно вычислить, например, графически. Используя этот результат, получим

$$T_{центр} - T_{поверх} = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \sum_n x_n \Delta x_n = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \frac{R^2}{2} = \frac{q_l}{4\pi\lambda} = 26°C$$

Обратим внимание, что разность температур между осью цилиндра и его поверхностью от его радиуса цилиндра не зависит.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная основная идея решения – в равновесии поток тепла через цилиндрическую должен равняться энерговыделению внутри этой поверхности – 0,5 балла.

2. Правильное нахождение по закону Фурье градиента температуры на тонком цилиндрическом слое – 0,5 балла

3. Правильное графическое суммирование (или с помощью формул, аналогичных нахождению работы упругой силы) градиентов температуры на всех цилиндрических слоях – 0,5 балла.

4. Правильный ответ для разности температур между центром цилиндра и его поверхностью – 0,5 балла.

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника

Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Округление оценки до целой не предусмотрено (итоговая оценка может быть как целой, так и «полуцелой»)