Решение

1. Пусть объемы сосудов V, и в третьем сосуде содержится масса m_1 первой жидкости, m_2 второй. Тогда для масс и объемов жидкостей в третьем сосуде имеем

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 1{,}6m \\ \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} &= V \end{aligned} \qquad (1)$$

где ρ_1 и ρ_2 - плотности первой и второй жидкостей. С другой стороны, плотности жидкостей 1 и 2, очевидно, равны

$$\rho_1 = \frac{m}{V}, \ \rho_2 = \frac{1{,}8m}{V}$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение системы (1), получим

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 1{,}6m \\ 1{,}8m_1 + m_2 &= 1{,}8m \end{aligned} \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (2), находим

$$m_1 = 0{,}25m, \ m_2 = 1{,}35m$$

Поэтому во всех трех сосудах содержится масса

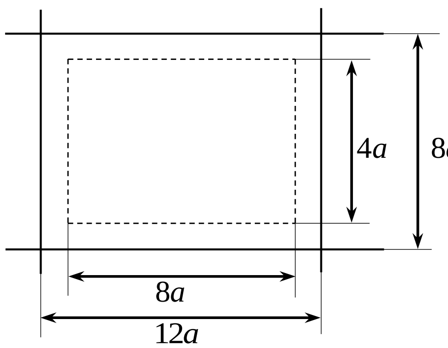
$$M_1 = m + 0{,}25m = 1{,}25m$$

первой жидкости и

$$M_2 = 1{,}8m + 1{,}35m = 3{,}15m$$

второй жидкости.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные формулы, связывающие массу, объем и плотность тела – 0,5 балла.
2. Правильная формула для массы жидкости во втором сосуде через плотности жидкостей 1 и 2 – 0,5 балла.
3. Правильная система уравнений для масс первой и второй жидкостей – 0,5 балла
4. Правильные ответы – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям



2. Поскольку по условию радиус отверстия много больше размеров ячейки, число ячеек, граничащих со стенками трубы, мало по сравнению с числом прямоугольных (внутренних) ячеек. Поэтому можно считать, что все ячейки сетки прямоугольные с размером $8a \times 12a$.

Далее, очевидно, что через сетку пройдут те шарики, центры которых пролетают дальше от проволочек, чем на расстоянии $2a$. Или, другими словами, те шарики, центры которых попадают в прямоугольник с размерами $6a \times 10a$ внутри ячейки (см. рисунок). А поскольку площадь такой ячейки $32a^2$, площадь ячейки сетки $96a^2$, а шарики распределены по пучку равномерно, то в каждой ячейке пролетит

$$\frac{32}{96}=\frac{1}{3}$$

шариков, из того количества, которое на нее попало. Следовательно, через сетку в трубе пролетит одна треть падающего потока шариков.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – найти площадь, попадая в которую, шарики пролетят, и площадь, попадая в которую, шарики задержатся – 0,5 балла.
2. Правильно определены границы этих областей – 0,5 балла.
3. Правильно определены площади этих областей – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Поскольку конец пружины движется равномерно, внешняя сила в любой момент времени равна силе упругости комбинированной пружины. Как известно, при последовательном соединении пружин комбинированная пружина подчиняется закону Гука, и ее коэффициент жесткости определяется сложением обратных коэффициентам жесткостей пружин-частей величин:

$$\frac{1}{k_{общ}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \qquad \Rightarrow \qquad k_{общ}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\frac{3}{5}k$$

где $k_{общ}$ - коэффициент жесткости комбинированной пружину, $k_1=k$ и $k_2=3k/2$ - коэффициенты жесткости пружин-частей. Поэтому в любой момент времени должно быть выполнено соотношение

$$F(t)=k_{общ}x=\frac{3}{5}kx \qquad (3)$$

где x - удлинение комбинированной пружины, которое равно перемещению ее свободного конца. А поскольку он движется с постоянной скоростью, из (3) находим зависимость внешней силы как функции времени

$$F(t)=\frac{3}{5}kvt\ .$$

Найдем теперь скорость точки соединения пружин. При последовательном соединении пружин сила упругости первой и второй пружины одинаковы. Поэтому и первую, и вторую пружины растягивает одна и та же сила $F(t)$. И, следовательно, удлинение ближней к стенке пружины (которое равно перемещению ее конца, т.е. точки соединения пружин) равно

$$x_1=\frac{F(t)}{k_1}=\frac{3}{5}\frac{kvt}{(3/2)k}=\frac{2}{5}vt$$

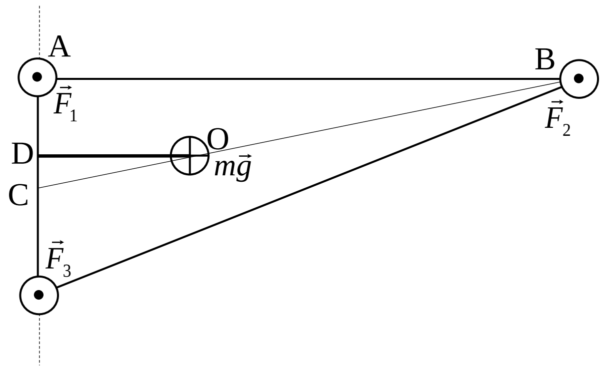
Отсюда следует, что точка соединения пружин движется с постоянной скоростью, которая составляет 2/5 от скорости конца комбинированной пружины

$$v_1=\frac{2}{5}v$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильно найдена зависимость внешней силы от времени (через общий коэффициент или другими способами) – 0,5 балла.
2. Правильная идея нахождения скорости точки А – применение аналогичных соотношений к пружине, контактирующей со стенкой – 0,5 балла.
3. Использование той же силы для растяжения этой пружины – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. Рассмотрим условие равновесия плиты. Чтобы удержать плиту, рабочие должны действовать на нее вертикальными силами. Силы, действующие на плиту, показаны на рисунке, на котором изображен вид плиты сверху; силы, действующие на плиту со стороны рабочих, и сила тяжести (сила, действующая на плиту в вершине прямого угла, обозначена как $\vec{F}_1$, на вершину меньшего острого угла – как $\vec{F}_2$, на вершину большего острого угла – как $\vec{F}_3$). Векторы сил показаны как стрелки, видные со стороны острия, или со стороны оперенья.



Поскольку плита находится в равновесии, для нее выполнены условия равновесия сил (сумма сил, действующих на плиту, равна нулю) и моментов (сумма моментов всех сил равна нулю). Причем условие моментов выполнено относительно любой оси. Рассмотрим условие моментов относительно оси, проходящей через короткий катет плиты (эта ось показана на рисунке тонкой пунктирной линией). Моменты сил F_1 и F_3 относительно этой оси равны нулю, плечо силы F_2 равно длине длинного катета плиты AB. Плечо силы тяжести определяется длиной перпендикуляра, опущенного из точки приложения силы тяжести, на ось (жирный отрезок OD на рисунке). Но сила тяжести приложена к центру тяжести плиты, который находится (как и у всякого плоского треугольника) в точке пересечения медиан. А поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану в соотношении 2:1 (считая от вершины), и в частности, медиану BC, то

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OC}} = \frac{3}{1}$$

С другой стороны, из подобия треугольников ABC и DOC имеем

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OC}}$$

Отсюда находим плечо силы тяжести

$$\mathrm{OD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}$$

Поэтому условие моментов для плиты относительно оси, проходящей через короткий катет плиты, дает

$$F_2 \cdot \mathrm{AB} = mg \cdot \frac{1}{3}\mathrm{AB}$$

Откуда находим

$$F_2 = \frac{1}{3}mg$$

Повторяя эти рассуждения для осей, проходящих через другие стороны плиты, получим аналогичные соотношения для сил F_1 и F_3:

$$F_1 = \frac{1}{3}mg; \qquad F_3 = \frac{1}{3}mg$$

Эти соотношения означают, что на каждого рабочего приходится одинаковая часть веса плиты –

$$\frac{1}{3}mg$$

Это утверждение сохраняется для плиты в форме любого треугольника, в том числе и для прямоугольного с любым соотношением катетов.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – использование уравнения моментов для вращения плиты вокруг оси, проходящей через двух рабочих – 0,5 балла.
2. Правильное положение центра тяжести треугольника (в точке пересечения медиан) – 0,5 балла.
3. Правильное уравнение моментов (с правильными плечами) – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Пусть в некоторый момент времени диск и обруч занимают самое нижнее положение в трубе (как это показано на рисунке в условии задачи). Отметим на диске вертикальный радиус (жирный отрезок на рисунке 1), а также точку обруча, касающуюся в этот момент трубы (точка A на рисунке 1; чтобы лучше разглядеть эти обозначения труба, обруч и диск на рисунке 1 чуть-чуть раздвинуты). Тонким пунктирным отрезком показан вертикальный радиус трубы, крестиками и буквами O, O_1 и O_2 отмечены центры диска, обруча и трубы соответственно.

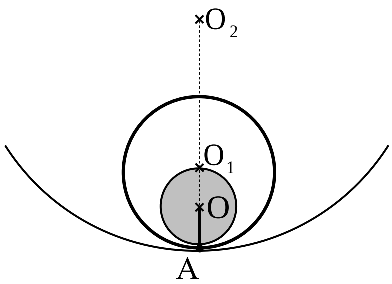


Рис. 1.

Пусть после этого момента прошел малый интервал времени Δt. Диск прокатится по внутренней поверхности трубы некоторое расстояние и повернет обруч. Поскольку проскальзывания диска по трубе и обручу и обруча по трубе по условию нет, диск и обруч повернутся на некоторые углы по часовой стрелке. Это положение показано на рисунке 2, на котором буквой B отмечена новая точка касания диска обруча и трубы, буквами A' и A'' отмечены точки трубы и диска, которые

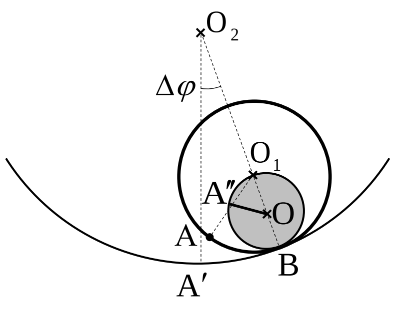


Рис. 2.

касались точки обруча A в начальный момент, крестиками и буквами O, O_1 и O_2 (как и на рисунке 1) отмечены центры диска, обруча и трубы. Найдем углы поворота диска и обруча.

Из-за отсутствия проскальзывания длины дуг BA′, BA и BA″ равны друг другу. Поэтому если точка касания диска обруча и трубы повернулась на угол $\Delta\varphi$ по сравнению с начальным положением (рис. 2), то

$$\mathrm{BA}=\mathrm{BA}''=R\Delta\varphi$$

Следовательно,

$$\angle\,\mathrm{BOA}''=\frac{R\Delta\varphi}{r},\ \angle\,\mathrm{BO_1A}'=\frac{R\Delta\varphi}{2r}$$

Отсюда находим углы поворота диска $\Delta\varphi_д$ и обруча $\Delta\varphi_о$ по сравнению с начальным положением (показанным на рисунке 1)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_д &= \angle\,\mathrm{BOA}''-\Delta\varphi=\frac{R\Delta\varphi}{r}-\Delta\varphi=\frac{(R-r)\Delta\varphi}{r}\\ \Delta\varphi_о &= \angle\,\mathrm{BO_1A}'-\Delta\varphi=\frac{R\Delta\varphi}{2r}-\Delta\varphi=\frac{(R-2r)\Delta\varphi}{2r}\end{aligned}\qquad(*)$$

Угол $\Delta\varphi$ можно связать со скоростью движения центра диска. Так как центр диска движется со скоростью v, то длина дуги Δl, связывающей старое и новое положение центра диска, с одной стороны, равна $v\Delta t$, с другой, выражается через угол поворота точки касания диска, обруча и трубы (и, следовательно, центра диска) $\Delta\varphi$

$$\Delta l=(R-r)\Delta\varphi\,.$$

Поэтому

$$\Delta\varphi=\frac{v\Delta t}{R-r}$$

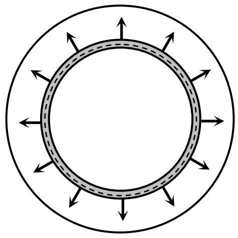
В результате из формулы (*) находим угловые скорости диска и обруча

$$\omega_д=\frac{\Delta\varphi_д}{\Delta t}=\frac{v}{r},\qquad \omega_о=\frac{\Delta\varphi_о}{\Delta t}=\frac{(R-2r)v}{2r(R-r)}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная основная идея решения – одинаковость дуг поворота трубы, обруча и диска – 0,5 балла.
2. Правильные геометрические формулы, связывающие углы поворотов тел. Учет поворота центра диска при подсчете поворотов обруча и диска вокруг своей оси – 0,5 балла
3. Правильный ответ для угловой скорости диска – 0,5 балла.
4. Правильный ответ для угловой скорости обруча – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Рассмотрим поток тепла через цилиндрическую поверхность радиуса x внутри цилиндра из отработанного топлива. В условиях теплового равновесия количество теплоты, проходящее через эту поверхность в единицу времени, равно количеству теплоты, выделяемому внутри цилиндра, ограниченного этой поверхностью. Поскольку всего в цилиндре длиной l в единицу времени выделяется количество теплоты $Q = q_l l$, а теплота выделяется равномерно по объему, то внутри рассматриваемого цилиндра выделяется количество теплоты

$$Q(x) = q_l l \frac{x^2}{R^2} \qquad (*)$$



С другой стороны, из закона теплопроводности Фурье следует, что чтобы через поверхность рассматриваемого цилиндра был поток тепла, в области его поверхности должен сформироваться градиент (изменение) температуры. Поэтому если взять тонкий цилиндрический слой толщиной Δx около поверхности рассматриваемого цилиндра (выделен темной заливкой на рисунке, поверхность цилиндра радиуса x показана пунктиром), то на основании закона Фурье заключаем, что на внутренней и внешней поверхностях этого слоя должна быть такая разность температур ΔT, что

$$Q(x) = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} 2\pi x l$$

где λ - коэффициент теплопроводности стекла, $\Delta T = T_{внут} - T_{внеш}$ - разность температур внутренней и внешней поверхностей слоя, S - площадь поверхности слоя. Подставляя сюда величину $Q(x)$ из (*), получаем для разности температур на внутренней и внешней поверхностях рассматриваемого слоя

$$\Delta T = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x \Delta x$$

Аналогичные формулы можно написать для всех тонких слоев, на которые можно мысленно разбить цилиндр из отработанного топлива:

$$\Delta T_1 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_1 \Delta x_1$$

$$\Delta T_2 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_2 \Delta x_2$$

$$\Delta T_3 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_3 \Delta x_3$$

……………………..

Сложим теперь все эти формулы. Тогда сумма в левой части даст разность температур между центром цилиндра и его поверхностью. В правой части получится сумма, которую приходится вычислять при вычислении работы силы упругости и которую можно вычислить, например, графически. Используя этот результат, получим

$$T_{центр} - T_{поверх} = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \sum_n x_n \Delta x_n = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \frac{R^2}{2} = \frac{q_l}{4\pi\lambda} = 26°C$$

Обратим внимание, что разность температур между осью цилиндра и его поверхностью от его радиуса цилиндра не зависит.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная основная идея решения – в равновесии поток тепла через цилиндрическую должен равняться энерговыделению внутри этой поверхности – 0,5 балла.
2. Правильное нахождение по закону Фурье градиента температуры на тонком цилиндрическом слое – 0,5 балла
3. Правильное графическое суммирование (или с помощью формул, аналогичных нахождению работы упругой силы) градиентов температуры на всех цилиндрических слоях – 0,5 балла.
4. Правильный ответ для разности температур между центром цилиндра и его поверхностью – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Округление оценки до целой не предусмотрено (итоговая оценка может быть как целой, так и «полуцелой»)