Решения

1. Для нагрева массы спирта m на ΔT нужно количество теплоты

$$Q = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$$

где c - удельная теплоемкость спирта, ρ - плотность спирта, V - его объем. Подставляя в эту формулу данные в условии величины и переводя все размерности в систему СИ, получаем

$$Q = 5{,}823\cdot 10^2 \cdot 4{,}187\left(\text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)}\right)\cdot 792{,}7\left(\text{кг/м}^3\right)\cdot 1\cdot 0{,}5683\cdot 10^{-3}\left(\text{м}^3\right)\times$$
$$\times\left(52\cdot 1{,}25\left({}^\circ\text{C}\right)-\left(68-32\right)\cdot 0{,}5555\left({}^\circ C\right)\right)$$

Отсюда

$$Q = 49{,}4\cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Использовано правильное соотношение для количества теплоты, необходимого для нагревания некоторого количества жидкости - 0,5 балла
2. Правильные пересчетные коэффициенты для удельной теплоемкости, пинты, градусов Фаренгейта и Реомюра – 1 балл
3. Правильные вычисления – 0,5 балла

2. Абсолютная точность измерения давления с помощью манометра определяется ценной деления шкалы. Найдем цену деления в случае, когда шкала прикреплена к широкому и узкому колену манометра (левый и правый рисунки в условии).

Пусть измеряемое давление p и объем, в котором измеряется давление, подсоединен к узкому колену манометра, а шкала присоединена к широкому (левый рисунок в условии). Разность уровней Δh воды в широком и узком коленах составляет

$$\Delta h = \frac{p}{\rho g}$$

При этом условие равенства объемов воды дает

$$\Delta h_у S_у = \Delta h_ш S_ш$$
$$\Delta h_у + \Delta h_ш = \Delta h$$

где $\Delta h_у, \Delta h_ш$ - величины изменения уровня воды в узком и широком коленах, $S_у, S_ш$ - площади сечения узкого и широкого колен сосуда. Отсюда находим

$$\Delta h_у = \frac{\Delta h S_ш}{S_у + S_ш} = \frac{p S_ш}{\rho g \left(S_у + S_ш\right)}, \qquad \Delta h_ш = \frac{\Delta h S_у}{S_у + S_ш} = \frac{p S_у}{\rho g \left(S_у + S_ш\right)}$$

Если цена деления шкалы (в единицах длины) равна d, то абсолютная погрешность измерения давления пропорциональна этой величине. Поэтому относительная погрешность измерения давления с помощью шкалы, присоединенной к узкому и широкому коленам, составляет

$$\delta p_у \approx \frac{d}{\Delta h_у} = \frac{d \rho g \left(S_у + S_ш\right)}{p S_ш}, \ \delta p_ш = \frac{d}{\Delta h_ш} = \frac{d \rho g \left(S_у + S_ш\right)}{p S_у}$$

Таким образом, относительная погрешность измерения одного и того же давления с помощью шкалы, присоединенной к узкому колену манометра, оказывается меньше, чем относительная погрешность измерения давления с помощью шкалы, присоединенной к широкому колену манометра. В отношении площадей сечений колен

$$\frac{\delta p_у}{\delta p_ш} = \frac{S_у}{S_ш}$$

Поэтому если погрешность измерения давления с помощью шкалы, присоединенной к узкому колену манометра, составляет 2%, то относительная погрешность измерения давления с помощью шкалы, присоединенной к широкому колену манометра, составит

$$\delta p_ш = \frac{\delta p_у S_ш}{S_у} = 32\%$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – нахождение цены деления шкалы и относительной погрешности измерения давления при прикреплении шкалы к широкому и узкому колену манометра - 0,5 балла
2. Правильные нахождение относительной погрешности манометра при прикреплении шкалы к широкому и узкому колену манометра - 0,5 балла
3. Правильные вычисления – 0,5 балла
4. Правильные и обоснованные выводы относительно точности измерения давления манометром при прикреплении шкалы к широкому и узкому коленам манометра – 0,5 балла.

3. Пусть длины ребер элемента равны a, b и c. Тогда сопротивление элемента, когда мы подключаем шины к грани $a \times b$, равно

$$R_{a\times b} = \frac{\rho c}{ab}$$

где ρ - удельное сопротивление материала элемента. Аналогично

$$R_{b\times c} = \frac{\rho a}{bc} \text{ и } R_{a\times c} = \frac{\rho b}{ac}$$

Отсюда находим соответствующие мощности

$$P_{a\times b}=\frac{U^2}{R_{a\times b}}=\frac{U^2ab}{\rho c}\,,\ P_{b\times c}=\frac{U^2}{R_{b\times c}}=\frac{U^2bc}{\rho a}\,,\ P_{a\times c}=\frac{U^2}{R_{a\times c}}=\frac{U^2ac}{\rho b}$$

Из условия находим

$$\frac{P_{a\times b}}{P_{b\times c}}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{1}{3}\,,\ \frac{P_{b\times c}}{P_{a\times c}}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{7}$$

Из этих уравнений и условия $abc=V$ находим

$$a=\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{V}\,,\ b=\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{7}}\sqrt[3]{V}\,,\ c=\sqrt[6]{21}\sqrt[3]{V}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Использовано правильное выражение для сопротивления проводника через его геометрические размеры – 0,5 балла.
2. Правильное использование закона Джоуля-Ленца при различных подключениях проводника - 0,5 балла
3. Составлены правильные уравнения с учетом правильного выражения объема элемента – 0,5 балла
2. Правильные ответы – 0,5 балла

4. Найдем число витков ленты на приемной катушке (после того, как она будет полностью намотана на катушку). Если радиус катушки с лентой равен R, то число витков есть

$$N=\frac{R-r}{d} \qquad (*)$$

С другой стороны, длину ленты можно найти как (с учетом того, что она – тонкая)

$$L=2\pi r+2\pi\left(r+d\right)+2\pi\left(r+2d\right)+...2\pi\left(r+Nd\right)=2\pi rN+2\pi d(1+2+...+N)=$$
$$2\pi rN+\pi dN^2=\pi N\left(R+r\right)$$

(Отметим, что получившийся результат является естественным. Длина ленты равна произведению числа витков на среднюю длину одного витка, которая из-за линейной зависимости длины витка от радиуса равна среднему арифметическому самого длинного - $2\pi R$ - и самого короткого - $2\pi r$ - витка). Отсюда с учетом формулы (*) находим радиус намотанной катушки

$$L=\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{d} \qquad \Rightarrow \qquad R=\sqrt{r^2+\frac{dL}{\pi}}$$

а затем по формуле (*) и число витков намотанной ленты

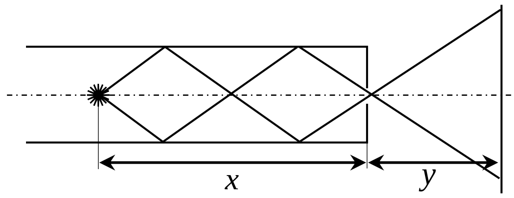
$$N=\frac{\sqrt{r^2+\frac{dL}{\pi}}-r}{d}=\frac{\sqrt{\pi r^2+dL}-\sqrt{\pi}r}{\sqrt{\pi}d}$$

Поскольку катушка вращается с постоянной угловой скоростью, каждый оборот она делает за одно и то же время, и потому полное время наматывания равно

$$t=N\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\left(\sqrt{\pi^2r^2+\pi dL}-\pi r\right)}{d\omega}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея вычисления времени перемотки – нахождение числа оборотов ленты – 0,5 балла.
2. Правильное нахождение числа оборотов ленты (и обоснование, если используется длина среднего оборота) – 0,5 балла.
3. Обоснование того, что каждый оборот наматывается на приемную катушку за одно и то же время – 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла.



5. Через отверстия пройдут лучи, падающие непосредственно на отверстие, но не только они. Через отверстие пройдут лучи, попавшие на него после отражений от зеркала. В частности, лучи, упавшие на поверхность зеркала на расстоянии $x/2$ от конца трубы (см. рисунок), не расстоянии $x/3$ (рисунок), $x/4$ и т.д. А лучи, падающие на внутреннюю поверхность трубки под углами, большими, чем те, что показаны на верхнем рисунке, в отверстие не попадут. А это значит, что на экране мы увидим систему ярких колец в тех местах, куда попадут лучи, и неосвещенных – в тех местах, куда лучи не попадут. Радиусы этих колец можно найти из следующих соображений. Лучи, образующие первое кольцо, испытают одно отражение от внутренней поверхности трубки ровно посередине от источника до отверстия. Поэтому из подобия треугольников ABO и A_1B_1O имеем для радиуса первого кольца r_1

$$\frac{AB}{BO} = \frac{OB_1}{A_1B_1} \qquad \Rightarrow \qquad A_1B_1 = r_1 = \frac{yr}{x/2} = \frac{2yr}{x}$$

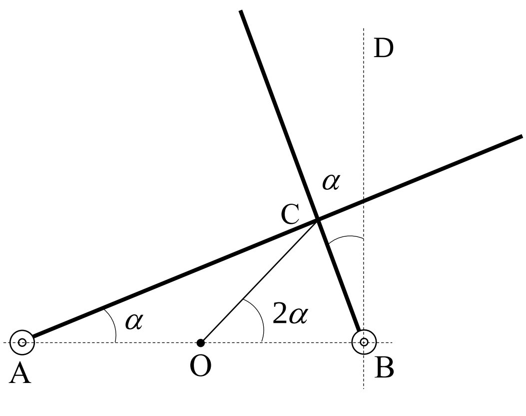
Лучи, образующие второе кольцо, испытают два отражение от внутренней поверхности трубки; первое из их - на расстоянии $x/4$, и т.д. Поэтому для радиуса n-го кольца находим

$$r_2 = \frac{yr}{x/2n} = \frac{2nyr}{x}$$

В частности, для радиуса пятого кольца получаем

$$r_5 = \frac{10yr}{x}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильное объяснение принципа возникновения колец - 0,5 балла
2. Правильное построение хода лучей, формирующих кольца – 0,5 балла
3. Правильный метод вычисления радиусов колец – 0,5 балла
4. Правильные вычисления радиуса пятого кольца – 0,5 балла



6. Поскольку стержни вращаются с одинаковой угловой скоростью, то угол, который составляет правый стержень с вертикалью и левый с горизонталью, равны в любой момент времени (см. рисунок; этот угол обозначен как α). А поскольку угол ABD – прямой, то угол CBA равен $90° - \alpha$. Отсюда следует, что угол ACB – прямой в любой момент времени. Таким образом, точка С движется так, что треугольник АВС – прямоугольный. Поэтому она движется по окружности, у которой отрезок АВ является диаметром. Следовательно, центр этой окружности находится в середине отрезка АВ (на рисунке он обозначен как О) и в тот момент когда угол между правым стержнем и вертикалью и левым стержнем и горизонталью равен α угол СОВ равен 2α (это легко доказать, используя факт равнобедренности треугольника АСО). Поэтому точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью 2ω. И, следовательно, величина скорости этой точки в любой момент времени равна

$$v = 2\omega \frac{l}{2} = \omega l \qquad (*)$$

Поскольку точка пересечения стержней движется равномерно, ее ускорение - центростремительное, и в любой момент времени определяется соотношением

$$a = (2\omega)^2 \frac{l}{2} = 2\omega^2 l \qquad (**)$$

Итак, точка пересечения стержней движется по окружности радиуса $l/2$ с центром в середине отрезка АВ. Ее скорость и ускорение в любой момент времени (и, следовательно, в тот, о котором говорится в условии) определяются формулами (*) и (**) соответственно.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Доказательство, что угол между стержнями – прямой в любой момент времени – 0,5 балла
2. Доказательство, что точка пересечения стержней движется по окружности с центром посередине между осям их вращения – 0,5 балла.
3. Правильно найдена угловая скорость точки пересечения стержней – 0,5 балла
4. Правильно найдено угловое ускорение точки пересечения стержней – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допускаются целые и «полуцелые» оценки.