Решения

1. 1 случай. Пусть $Z1=0$ и $Z2=0$. Согласно таблице истинности логического элемента 2И-НЕ на выходе нижнего логического элемента будет напряжение питания, независимо от второго входа этого элемента. Светодиод горит.

2 случай. Пусть $Z1=1$ и $Z2=0$. Согласно таблице истинности логического элемента 2И-НЕ на выходе нижнего логического элемента будет напряжение питания, независимо от второго входа этого элемента. Светодиод горит.

3 случай. Пусть $Z1=0$ и $Z2=1$. Согласно таблице истинности логического элемента 2И-НЕ на выходе верхнего логического элемента будет напряжение питания, независимо от второго входа этого элемента. На оба входа нижнего элемента подается напряжение питания, следовательно, по таблице истинности логического элемента заключаем, что на его выходе нулевое напряжение. Светодиод не горит.

4 случай. Пусть $Z1=1$ и $Z2=1$. Предположим, что на выходе нижнего элемента есть напряжение питания и проверим это предположение. Тогда на оба входа верхнего элемента подается напряжение питания, следовательно, на его выходе нулевое напряжение. Следовательно, на входы нижнего элемента подаются нулевое напряжение и напряжение питания. На его выходе – напряжение питания. Следовательно, наше предположение было верным. Светодиод горит.

Но точно так же можно доказать, что на выходе нижнего логического элемента может быть и нулевое напряжение. Действительно, в этом случае на входы верхнего элемента подаются напряжение питания и нулевое напряжение, на его выходе – напряжение питания, на обоих входах нижнего элемента – напряжение питания, на выходе – нуль. Следовательно, и это предположение верно, и при подаче на входы напряжений $Z1=1$ и $Z2=1$ возможны два режима работы - светодиод может гореть или не гореть (см. таблицу включений светодиода).

№	$Z1$	$Z2$	светодиод
1.	0	0	горит
2.	1	0	горит
3.	0	1	не горит
4.	1	1	горит не горит

От чего же зависит, будет или не будет гореть в последнем случае светодиод? Очевидно, от предыстории. Если до подачи напряжений $Z1=1$ и $Z2=1$ он горел, то он так и будет гореть, когда эти напряжения будут поданы. И если не горел, то гореть и не будет.

Рассмотрим теперь случай кратковременных изменений сигналов.

1 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод горит. При кратковременной подаче $Z1=0$ (и неизменном $Z2=1$) согласно таблице включений светодиода он потухнет и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$ останется выключенным.

2 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод горит. При кратковременной подаче $Z2=0$ (и неизменном $Z1=1$) согласно таблице включений светодиода он останется

гореть. Поэтому он останется гореть и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$ останется выключенным.

3 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод не горит. При кратковременной подаче $Z1=1$ (и неизменном $Z2=0$) согласно таблице включений светодиода он включится и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$ останется включенным.

4 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод не горит. При кратковременной подаче $Z2=1$ (и неизменном $Z1=0$) согласно таблице включений светодиода он останется выключенным. Поэтому он останется выключенным и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Участник в принципе понимает, как используя таблицу истинности каждого из устройств 2И-Не, понять горит или не горит светодиод – 0,5 балла

2. Участник правильно построил таблицу включений светодиода в случаях 1, 2 и 3 – 0,5 балла.

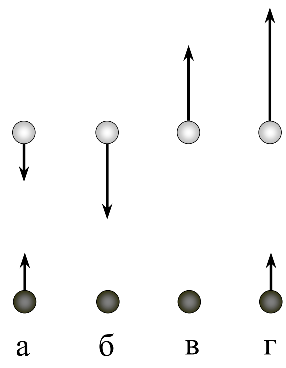
3. Участник понял, что в случае 4 возможны 2 варианта включения светодиода в зависимости от «предыстории» – 0,5 балла

4. Участник правильно проанализировал кратковременную подачу напряжения $Z1=0$ или $Z2=0$ в случае 4 – 0,5 балла

2. Шарики будут падать с одинаковым ускорением g и, следовательно, вместе достигнут поверхности земли, имея одинаковые скорости. Поскольку по условию между шарами есть небольшой зазор, произойдут два столкновения: сначала каучуковый шарик столкнется с землей, а потом каучуковый шарик и шарик от пинг-понга столкнутся между собой. Найдем скорости шаров до и после столкновений.

Скорости шаров до столкновения с землей будут одинаковы. Их можно найти по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gh} \qquad (*)$$



а б в г

После упругого столкновения с землей каучуковый шарик поменяет свою скорость на противоположную. Поэтому столкновение шариков происходит так: шары с одинаковыми скоростями v (*) движутся навстречу друг другу (рисунок а). Скорость шарика от пинг-понга после столкновения легко найти, переходя в систему отсчета, связанную с нижним шариком. В ней нижний шарик покоится, а верхний движется навстречу со скоростью $2v$ (рисунок б). Поскольку по условию масса нижнего шарика много больше массы верхнего, после столкновения нижний останется на месте, верхний поменяет скорость на противоположную. Т.е. в этой системе отсчета (движущейся относительно земли вверх со скоростью v (*)), верхний шарик будет иметь скорость $2v$, а нижний покоится (рисунок в). Поэтому в системе отсчета, связанной с землей, нижний шарик будет иметь скорость v, направленную вверх, а верхний – скорость $3v$, направленную вверх. Применяя теперь к шарикам закон сохранения энергии (аналогично (*), но для нахождения высоты подъема H по начальной скорости V)

$$H = \frac{V^2}{2g}$$

заключаем, что нижний (тяжелый) шарик подпрыгнет практически на ту же высоту h, с которой шарики падали, верхний (легкий) - на высоту $9h$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – одинаковая скорость шариков перед падением на землю, отражение первого и нахождение скорости второго шарика после столкновения с первым – 0,5 балла

2. Правильно найдены скорости шариков перед столкновением с землей – 0,5 балла.

3. Правильно найдена скорость второго шарика после столкновения с первым – 0,5 балла

4. Правильно найдена высота подъема второго шарика – 0,5 балла

3. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся по часовой стрелке вместе с рычагом, связывающим колеса. В этой системе отсчета рычаг покоится, а колесо 1 вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω, колесо 2 – по часовой стрелке с угловой скоростью ω, колесо 3 – против угловой стрелки и т.д. (см. рисунок 1).

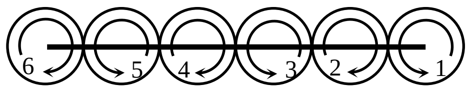


Рис. 1.

Перейдем теперь назад в систему отсчета, связанную с землей. Пусть в какой-то момент времени, рычаг направлен налево от оси вращения (см. рисунок 2). Проследим за вращением точки A четного (6-го колеса) и точки B нечетного (пятого колеса). Эти точки показаны на рисунке 2. Пусть после рассматриваемого момента времени прошел малый интервал времени Δt. Тогда рычаг повернулся на угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ по часовой стрелке. На такой же угол по отношению к рычагу (ведь колеса имеют угловую скорость ω относительно рычага) повернутся и колеса: четное колесо – по часовой стрелке, нечетное колесо – против часовой стрелки.

На рисунке 3 показаны положение рычага и колес спустя интервал времени Δt после положения, показанного на рисунке 2. А углы поворота рычага и колес показаны дугами. Из этого рисунка заключаем, что четное колесо повернется по отношению к своему начальному положению на угол $2\Delta\varphi$ по часовой стрелке, нечетное – не повернется вообще. Это значит, что угловые скорости четного колеса и рычага складываются и дают удвоенную угловую скорость по часовой стрелке. Угловые скорости нечетного колеса и рычага вычитаются. Таким образом при вращении рычага, связывающего колеса, по часовой стрелке (при условии, что

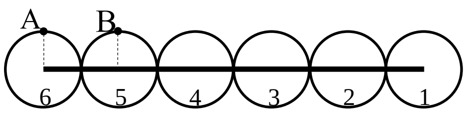


Рис. 2.

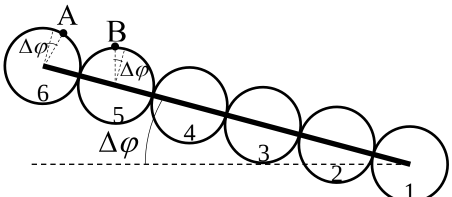


Рис. 3.

первое колесо закреплено) все четные колеса будут вращаться вокруг своей оси по часовой стрелке с угловой скоростью 2ω, нечетные – вообще не будут вращаться вокруг своей оси.

Возможно также другое решение без перехода в систему отсчета, связанную с рычагом. Поскольку первое колесо по условию покоится, то линейная скорость точки второго колеса, связанной в данный момент с первым, равна нулю, скорость его центра v_1 равна скорости рычага в этой точке $v_1 = 2r\omega$. Поэтому это колесо должно вращаться с такой угловой скоростью ω_2, чтобы

$$2r\omega - \omega_2 r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = 2\omega$$

Отсюда находим линейную скорость точки второго колеса, которая контактирует с третьим колесом

$$v_{23} = 2\omega r + \omega_1 r = 4\omega r .$$

Скорость центра третьего колеса v_3 равна скорости рычага в той точке, где находится центр третьего колеса

$$v_3 = 4r\omega .$$

Из двух последних формул видим, что и центр третьего колеса и его точка, касающаяся второго, имеют одинаковые скорости. Следовательно, третье колесо не вращается

$$\omega_3 = 0 .$$

Поэтому и его точка, касающаяся четвертого колеса, имеет такую же линейную скорость

$$v_{34} = 4\omega r .$$

Значит, такую же скорость имеет и точка четвертого колеса, касающаяся третьего. С другой стороны, линейная скорость центра четвертого колеса v_4 равна линейной скорости рычага в той точке, где находится центр четвертого колеса

$$v_4 = 6\omega r$$

Поэтому четвертое колесо должно вращаться с такой угловой скоростью ω_4, что

$$6\omega r - \omega_4 r = 4\omega r \qquad \Rightarrow \qquad \omega_4 = 2\omega$$

И т.д. Из этой цепочки равенств видим, что скорость всех нечетных колес равна нулю, четных - 2ω.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

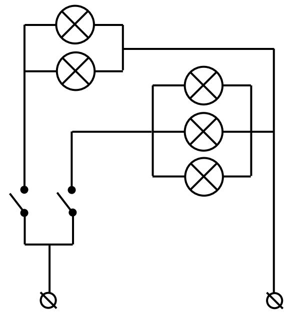
1. Участник в принципе понимает, как правильно связывать параметры вращения зацепляющихся колес – одинаковая линейная скорость на поверхности – 0,5 балла

2. Построен правильный алгоритм нахождения угловых скоростей колес – «скорость центра минус скорость вращения относительно центра равна скорости точки, зацепляющейся за предыдущее колесо» – 0,5 балла

3. Правильно найдена угловая скорость второго и третьего колес – 0,5 балла.

4. Правильное заключение об угловых скоростях четных и нечетных колес – 0,5 балла

4. Схема включения люстры приведена на рисунке.



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

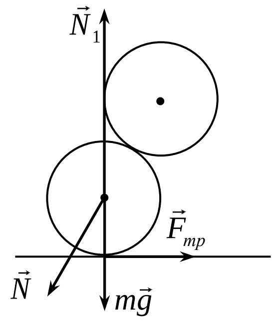
1. Правильная идея подключения – каждая лампочка должны быть подключена к источнику без каких-либо последовательных элементов – 0,5 балла

2. Правильно подключены три лампочки к одному выключателю и параллельно друг другу – 0,5 балла

3. Правильно подключены две лампочки - к другому выключателю и параллельно друг другу – 0,5 балла.

4. Правильная схема включения всей люстры – 0,5 балла

5. Рассмотрим один из нижних шаров. На него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны верхнего шара $\vec{N}$, сила реакции пола $\vec{N}_1$, сила трения со стороны пола $\vec{F}_{тр}$, мешающаяся шарам разъезжаться (см. рисунок). Рассмотрим условие моментов относительно точки касания шара и пола. Поскольку три силы – тяжести, реакции и трения обязательно имеют нулевые плечи относительно этой точки, а сила $\vec{N}_1$ - ненулевое, то условие моментов относительно этой точки в принципе не может быть выполнено, и шары не могут быть в равновесии. Это значит, что при любом сколь угодно малом трении шары будут раскатываться.



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

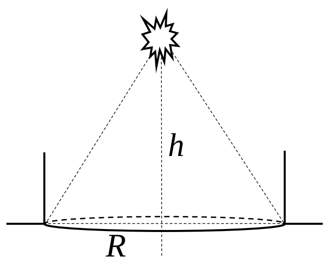
1. Правильный аргументация и вывод – шары раскатываются при любом трении – 2 балла.

В случае, если участник не сделал этого вывода и не понял, что шары будут раскатываться при любом трении

2. Правильная расстановка сил, действующих на все шары – 0,5 балла

3. Участник продемонстрировал понимание анализа силы трения ($F_{тр}^{\max} = \mu N$), правильно провел этот анализ для случая отсутствия вращения – 0,5 балла

6. Поскольку осколки застревают в колоколе, они передают ему свой импульс. А так как суммарный импульс осколков равен нулю, то если бы колокол окружал заряд со всех сторон, то после взрыва он бы не двигался. Поэтому движение колокола связано с тем, что часть осколков попа-



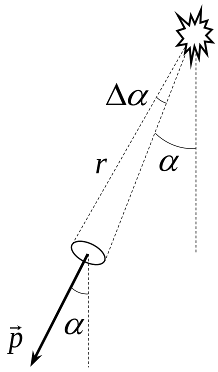
дают в землю и не передают колоколу свой импульс. По закону сохранения импульса импульс осколков попадающих в колокол, равен импульсу осколков, попадающих в землю. Найдем последний.

В землю попадут все осколки, которые движутся после взрыва в конусе, опирающемся на основание колокола, с вершиной в точке взрыва (см. рисунок). Пусть при взрыве образовалось N осколков (по условию число N много больше единицы $N \gg 1$). Поскольку суммарная энергия осколков E, то скорость каждого осколка можно найти из соотношения

$$\frac{\Delta m v^2}{2} N = E$$

(Δm - масса каждого осколка, v - его скорость). Но т.к. $\Delta m N = m$ (m - масса всего заряда), то скорости всех осколков равны

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$



Рассмотрим теперь осколки, движущиеся внутри бесконечно узкого конуса с углом раствора $\Delta\alpha$, расположенного под углом α к вертикали (см. рисунок). Количество осколков, которые движутся внутри этого конуса ΔN, так относится к полному числу осколков N, как относится площадь основания этого конуса ΔS к площади сферы, радиус которой равен высоте конуса r

$$\Delta N = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} N$$

Импульс этих осколков Δp можно найти как

$$\Delta p = \Delta N \Delta m v = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} N \Delta m v = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} m v = \frac{\Delta S}{4\pi r^2} \sqrt{2mE}$$

Суммарный импульс этих осколков направлен вертикально вниз и равен сумме вертикальных проекций импульсов осколков, попадающих в землю. Поэтому импульс осколков, попавших в землю равен

$$P = \sum \Delta p \cos\alpha = \sum \frac{\Delta S \cos\alpha}{4\pi r^2} \sqrt{2mE}$$

Но величина $\Delta S \cos\alpha$ равна проекции площади основания рассматриваемого конуса на поверхность земли. Поэтому

$$\sum \frac{\Delta S \cos\alpha}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{4\left(R^2 + h^2\right)}$$

Отсюда находим суммарный импульс осколков, ушедших в землю

$$P = \frac{R^2 \sqrt{2mE}}{4\left(R^2 + h^2\right)}$$

Такой же импульс (на направленный вверх) получит колокол, и, следовательно, по закону сохранения импульса его скорость сразу после взрыва заряда будет равна

$$V = \frac{R^2\sqrt{2mE}}{4\left(R^2+h^2\right)M}$$

(здесь мы пренебрегли массой осколков, застрявших в колоколе). Высоту подъема колокола теперь можно найти по закону сохранения энергии

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{mER^4}{16\left(R^2+h^2\right)^2 M^2 g}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – нахождение импульса, переданного колоколу, через импульс осколков, попавших в землю, – 0,5 балла

2. Правильно найден и связан с энергией взрыва импульс осколков, летящих в малом телесном угла под некоторым углом к перпендикуляру, опущенному из точки взрыва на землю – 0,5 балла.

3. Правильно просуммированы вертикальные компоненты импульсов этих осколков и найдена скорость колокола – 0,5 балла

4. Правильно найдены высота подъема колокола над землей – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.