**Решения и критерии оценивания**
**Задач очного отборочного тура**
**Инженерной олимпиады школьников, 9-10 класс,**
**2018-2019 учебный год. Комплект 1**

**1.** В шкафу у кота Леопольда стоит бутылка раствора озверина в воде – бесцветной прозрачной жидкости - объемом $V = 0,5$ л и объемной концентрацией озверина $C = 40$ %. Ежедневно кот выпивает $v = 0,1$ л озверина и, чтобы не увидели мышата, доливает в бутылку воды. Какой будет концентрация озверина в бутылке через пять дней?

**Решение.** В 40-процентном озверине содержится объем

$$V_0 = CV$$

чистого озверина ($C = 40\%$). Когда кот выпил $v = 0,1$ л раствора озверина, то он выпил и пропорциональный выпитому объему и объем чистого вещества $(v/V)V_0$. Поэтому в растворе остался объем чистого озверина

$$V_1 = V_0\left(1 - \frac{v}{V}\right).$$

Во время второго выпивания кот снова выпил $(v/V)$-часть имеющегося чистого вещества в растворе ($(v/V)V_1$) и, следовательно, в растворе остался объем чистого озверина

$$V_2 = V_1\left(1 - \frac{v}{V}\right) = V_0\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$$

И т.д. Поэтому после выпивания пятой порции в растворе останется объем чистого озверина

$$V_5 = V_0\left(1 - \frac{v}{V}\right)^5 = CV\left(1 - \frac{v}{V}\right)^5$$

А концентрация озверина будет равна

$$C_5 = C\left(1 - \frac{v}{V}\right)^5 = 13,1\%$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):**

1. Правильное понимание того, что такое объемная концентрация раствора - 0,5 балла
2. Правильное нахождение концентрации раствора после одного доливания воды – 0,5 балла
3. Правильная формула для концентрации раствора после пяти доливаний воды – 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла

**2.** Елочная гирлянда состоит из 15 одинаковых лампочек номинальной мощностью $P_1 = 5$ Вт каждая, соединенных последовательно, причем при включении в электрическую сеть все лампочки светят нормальным накалом. 5 лампочек заменили лампочками, рассчитанными на то же напряжение, но с номинальной мощностью $P_1/2 = 2,5$ Вт каждая. Как изменилось полная мощность, потребляемая гирляндой при включении ее в ту же электрическую сеть? Найти мощность, потребляемую старой и новой лампочкой в такой гирлянде?

**Решение.** Пусть номинальное напряжение каждой из пятнадцати старых лампочек равно $U_0$. Тогда, поскольку лампочки горели нормальным накалом, напряжение сети равно

$$U = NU_0$$

($N = 15$), сопротивление каждой лампочки -

$$r_1 = \frac{U_0^2}{P_1},$$

а полная выделяемая мощность –

$$P_{ст} = NP_1.$$

Поскольку лампочки-заменители рассчитаны на то же напряжение, но имеют номинальную мощность $P_2 = P_1 / 2$, сопротивление каждой новой лампочки есть

$$r_2 = \frac{U_0^2}{P_2}$$

и, следовательно, общее сопротивление новой цепи будет равно

$$R = \left(N - k\right) r_1 + k r_2 = U_0^2 \left( \frac{N-k}{P_1} + \frac{k}{P_2} \right)$$

($k = 5$). Поэтому полная мощность, выделяемая в новой цепи будет равна

$$P_{нов} = \frac{U^2}{R} = \frac{N^2}{\left( \frac{N-k}{P_1} + \frac{k}{P_2} \right)} = \frac{N^2 P_1 P_2}{\left(N-k\right) P_2 + k P_1}$$

Поскольку мощность новых лампочек составляет половину старых, имеем

$$P_{нов} = \frac{N^2 P_1 P_2}{\left(N-k\right) P_2 + k P_1} = \frac{N^2 P_1}{N+k} = \frac{N}{N+k} P_{ст} = \frac{3}{4} P_{ст} = 56{,}3 \text{ Вт}$$

Таким образом, выделяемая в новой цепи мощность составляет три четверти от мощности, выделяемой в старой.

Найдем теперь, какая мощность будет выделяться на старых и новых лампочках в новой цепи. Поскольку ток, текущий через лампочки одинаков (последовательное соединение), а сопротивление каждой новой лампочки в 2 раза больше сопротивления старой, из закона Джоуля-Ленца заключаем, что мощность, выделяемая на каждой новой лампочке, будет в 2 раза больше мощности, выделяемой на каждой старой. Поэтому

$$\left(N-k\right) P_1^{нов} + k P_2^{нов} = P_{нов} \quad \Rightarrow \quad 10 P_1^{нов} + 2 \cdot 5 P_1^{нов} = \frac{3}{4} 15 P_1 \quad \Rightarrow \quad P_1^{нов} = \frac{45}{80} P_1 = 2{,}8 \text{ Вт}$$

$$P_2^{нов} = \frac{45}{40} P_1 = 5{,}6 \text{ Вт}$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):**

1. Правильно найдены сопротивления старой и новой лампочки – 0,5 балла.

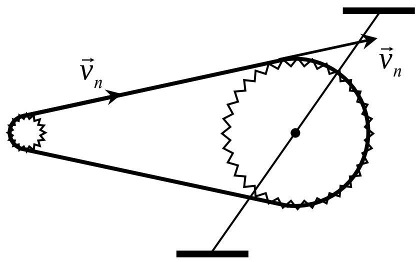
2. Правильно найдена полная мощность, выделяемая во всей цепи - 0,5 балла

3. Правильно найдена мощность, выделяемая на старой лампочке в новой цепи – 0,5 балла

2. Правильно найдена мощность, выделяемая на новой лампочке – 0,5 балла

**3.** Велосипедист вращает колеса велосипеда с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с. Радиус зубчатого колеса, связанного с педалями («звездочки») - $r_п$, радиус зубчатого колеса, связанного с задним колесом - $r_к = r_п / 4$. Радиус заднего колеса - $R = 60$ см. Найти скорость велосипеда. Как велосипедисту нужно изменить радиусы зубчатых колес (с помощью системы переключения передач), чтобы увеличить свою скорость? Уменьшить прикладываемое к педалям усилие?

**Решение.** Поскольку зубчатые колеса связаны нерастяжимой цепью, то линейные скорости точек на периферии зубчатых колес совпадают $\vec{v}_п = \vec{v}_к$ (см. рисунок). Или




$$\omega r_п = \omega_к r_к$$

где $\omega_к$ - угловая скорость шестерни заднего колеса. А поскольку эта шестерня жестко связана с самим задним колесом, оно вращается с той же угловой скоростью. Поэтому линейная скорость точек на ободе заднего колеса равна

$$v = \omega_к R = \frac{\omega r_п}{r_к} R = 4\omega R = 12 \text{ м/с} \qquad (*)$$

А поскольку точка на ободе движется относительно центра колеса со скоростью (*) и не проскальзывает относительно земли, то центр колеса и, следовательно, сам велосипед движутся относительно земли со скоростью (*).

При фиксированной угловой скорости вращения педалей эта скорость будет возрастать с уменьшением радиуса задней шестерни и увеличением радиуса шестерни, связанной с педалями. Это, однако, потребует существенно бóльших усилий от велосипедиста. На гоночных велосипедах предусмотрена возможность «переключения скоростей», т.е. использования шестерней разных радиусов.

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Правильная идея решения – одинаковые линейные скорости точек на периферии большого и малого зубчатых колес – 0,5 балла.

2. Обоснование одинаковости скоростей – 0,5 балла.

3. Правильно найдена скорость велосипеда – 0,5 балла

4. Описано и обосновано, что будет происходить со скоростью и силами, которые необходимо прикладывать к педалям, при изменении радиусы зубчатых колес – 0,5 балла.

**4.** В бензиновом двигателе за секунду сгорает $\Delta m = 0,5$ г бензина. Треть теплоты сгорания превращается двигателем в механическую работу, две трети в виде тепла передаются охлаждающей двигатель воде. Эта вода течет по трубке, многократно опоясывающей двигатель. Площадь сечения трубки $S = 1$ см$^2$. В установившемся режиме разность температур воды на входе и выходе из системы охлаждения равна $\Delta T = 20°$ С. Найти скорость течения воды в трубке. Считать, что все отданное двигателем тепло поглощается водой системы охлаждения. Удельная теплота сгорания бензина $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$град), плотность воды $\rho = 1$ г/см$^3$.

**Решение.** Пусть скорость течения воды в трубке $v$. Тогда за малый интервал времени $\Delta t$ в трубку втекает масса воды $\Delta\mu = \rho S v \Delta t$. Такое же количество и вытекает из трубки, так как вода нигде не накапливается. Следовательно, за этот интервал времени из двигателя уносится следующее количество теплоты

$$\delta Q = c\Delta\mu\Delta T = c\rho S v \Delta t \Delta T$$

$c$ - удельная теплоемкость воды. С другой стороны, за рассматриваемый интервал времени в двигателе выделится $\delta Q = q\Delta m \Delta t$ из которых 2/3 будет передано воде. Отсюда

$$\frac{2}{3} q\Delta m = c\rho S v \Delta T \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{2q\Delta m}{3c\rho S\Delta T} = 1,83 \text{ м/с.}$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Правильно найдено количество теплоты, выделяемое в двигателе за некоторый интервал времени $\Delta t$ – 0,5 балла
2. Правильно найдена масса воды, которая протекает по системе охлаждения за интервал времени $\Delta t$ – 0,5 балла
3. Правильно найдено количество теплоты, которое нужно, чтобы нагреть охлаждающую воду на $\Delta T$ – о,5 балла
4. Правильный ответ для скорости течения воды в системе охлаждения. Верные вычисления – 0,5 балла

**5.** Имеются три цилиндрических сосуда, отличающиеся только высотой. Емкости сосудов равны $V$, $2V$ и $4V$. Все сосуды заполнены водой до краев. Воду в сосудах греют с помощью одинаковых нагревателей. Мощности нагревателя хватает для того, чтобы нагреть воду в первом сосуде до температуры $t_1 = 90°C$, во втором – до температуры $t_2 = 80°C$. До какой температуры можно нагреть воду в третьем сосуде, если комнатная температура $t_0 = 20°C$? Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур воды и окружающей среды, а также площади контакта тел с разными температурами (закон Фурье). Вода в сосуде прогревается равномерно.

**Решение.** При нагреве до максимальной температуры количество теплоты, отдаваемое сосудами окружающей среде, равно количеству теплоты, выделяемому нагревателем. С другой стороны, теплоотдача складывается из потока тепла через боковые стенки, дно и поверхность. Поэтому для мощности теплоотдачи $w$ первым сосудом имеем

$$w = \lambda_1 S_1 (t_1 - t_0) + \lambda_2 S_2 (t_1 - t_0) + \lambda_3 S_1 (t_1 - t_0)$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\lambda_3$ - коэффициенты пропорциональности, определяющие теплоотдачу дна, боковых стенок сосуда и поверхности, $S_1$ - площадь дна и поверхности, $S_2$ - площадь боковых стенок первого сосуда.

Для мощности теплоотдачи в случае второго сосуда имеем

$$w = \lambda_1 S_1 (t_2 - t_0) + \lambda_2 2S_2 (t_2 - t_0) + \lambda_3 S_1 (t_2 - t_0)$$

Аналогично для нагревания воды в теретьенм сосуде

$$w = \lambda_1 S_1 (t_2 - t_0) + \lambda_2 4S_2 (t_2 - t_0) + \lambda_3 S_1 (t_2 - t_0)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (t_1 - t_0)(\lambda_1 S_1 + \lambda_3 S_1 + \lambda_2 S_2) &= (t_2 - t_0)(\lambda_1 S_1 + \lambda_3 S_1 + 2\lambda_2 S_2) \\ (t_1 - t_0)(\lambda_1 S_1 + \lambda_3 S_1 + \lambda_2 S_2) &= (t_3 - t_0)(\lambda_1 S_1 + \lambda_3 S_1 + 4\lambda_2 S_2) \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений проще провести «в числах». Поскольку $t_1 - t_0 = 70°C$, $t_2 - t_0 = 60°C$, то, вводя обозначения $X = \lambda_1 S_1 + \lambda_3 S_1$, $Y = \lambda_2 S_2$, $Z = t_3 - t_0$, получим

$$\begin{aligned} 70(X + Y) &= 60(X + 2Y) \\ 70(X + Y) &= Z(X + 4Y) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (*)$$

Система двух уравнений (*) содержит три неизвестных величины, и потому не может быть разрешена относительно всех неизвестных. Тем не менее, величину $Z$ из нее можно найти. Действительно, если вынести за скобку в правой и левой частях первого и второго равенства величину $X$ и сократить, то система будет содержать только две неизвестных - величину $Z$ и отношение $Y/X$ которые, следовательно, могут быть найдены. Выражая из первого равенства величину $X$

$$X = 5Y$$

и подставляя во второе, получим

$$Z = 46,7°C$$

или

$$t_3 = 66,7°C$$

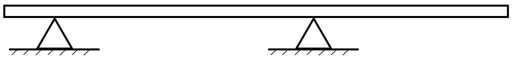
**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Верно записано условие для мощности теплопотерь в первом сосуде – 0,5 балла
2. Верно записано условие для мощности теплопотерь во втором и третьем сосудах – 0,5 балла

3. Составлена правильная система уравнений, из которой можно найти температуру в третьем сосуде – 0,5 балла

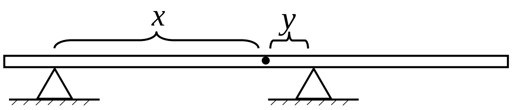
4. Получен верный ответ – 0,5 балла

**6.** Доска лежит горизонтально на двух точечных опорах. Расстояние между опорами равно половине длины доски.



Чтобы перевернуть доску относительно одной опоры к концу доски необходимо приложить силу $F$, направленную вертикально вниз. Чтобы перевернуть доску относительно другой опоры к ее второму концу необходимо приложить силу $2F$, направленную вертикально вниз. Найти массу доски.

**Решение.** Пусть длина доски - $L$, расстояние от опор до центра тяжести доски - $x$ и $y$ (см. рисунок; центр тяжести доски обозначен точкой).




Тогда условие переворота относительно левой опоры дает

$$2F\left(\frac{L}{2}-x\right)=mgx \qquad (*)$$

А условие переворота относительно правой опоры

$$F\left(\frac{L}{2}-y\right)=mgy$$

Учитывая, что $y=L/2-x$, из второго равенства получим

$$Fx=mg\left(\frac{L}{2}-x\right) \qquad (**)$$

Перемножая равенства (*) и (**), найдем

$$2F^2=(mg)^2.$$

Откуда

$$m=\frac{\sqrt{2}F}{g}$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):**

1. Правильная идея – использовать уравнения статики (уравнения моментов) для нахождения условий переворачивания доски – 0,5 балла

2. Правильно написаны условия переворачивания доски через первую и вторую опору – 0,5 балла.

3. Правильная система уравнений (*) и (**) для нахождения массы доски – 0,5 балла

4. Правильный ответ – 0,5 балла

**Оценка работы**

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.