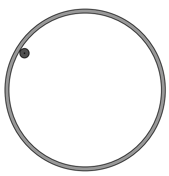
Решения и критерии оценивания
Задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников, 9-10 класс,
2018-2019 учебный год

1. Имеются две лампочки - одна мощностью $P_1 = 110$ Вт рассчитана на работу в бытовой электрической сети напряжением $U_1 = 220$ В. Вторая лампочка от карманного фонарика рассчитана на напряжение $U_2 = 3{,}5$ В и силу тока $I_2 = 0{,}28$ А. Лампочки соединяют последовательно и подключают к бытовой электрической сети. Перегорит ли какая-нибудь из лампочек? Считать, что нити накала лампочек в любой момент времени имеют сопротивление рабочего режима.

2. Инженеры-взрывотехники, изучая взрыв экспериментального субъядерного заряда, установили, что сразу после взрыва заряд превращается в шарообразное однородное облако мельчайшей пыли радиуса R и плотности ρ_0. Начальная скорость v каждой пылинки облака направлена от его центра и пропорциональна расстоянию r от нее до центра облака: $v = Hr$, где H - известный коэффициент. Считая, что в дальнейшем скорости пылинок не меняются, определите плотность пыли на расстоянии x от центра облака через время t после взрыва.



3. К стене прислонили и удерживают обруч. В одной точке в стене «внутри» обруча в стену вбили гвоздь так, что обруч касается его (см. рисунок). Найти геометрическое место точек стены, в которые нужно вбить второй гвоздь внутри обруча, чтобы обруч оставался неподвижным. Ответ обосновать (даже правильный ответ без обоснования засчитываться не будет).

4. В распоряжении инженера имеются пять электрических лампочек: три - номинальной мощностью $P_1 = 40$ Вт и две - номинальной мощностью $P_2 = 60$ Вт. Все лампочки рассчитаны на напряжение $U = 110$ В. Как следует подключить эти лампочки к бытовой электрической сети напряжением $U_1 = 220$ В, чтобы все они горели нормальным накалом?

5. Имеется плоская металлическая пластинка. Если пластинку расположить перпендикулярно солнечным лучам, то ее освещенная сторона будет иметь температуру $t_1 = 50°$С, а противоположная сторона – температуру $t_2 = 30°$С. Какими будут температуры освещенной и теневой сторон, если взять пластину удвоенной толщины? Считать, что пластинка очень тонкая и отдает энергию окружающей среде благодаря теплопроводности. Температура окружающей среды - $t_0 = 25°$С. Указание. В установившемся режиме поток тепла между телами пропорционален разности их температур и площади контакта, и обратно пропорционален расстоянию между ними (закон теплопроводности Фурье).

6. Работая в секретной военной лаборатории Чебурашка и крокодил Гена синтезировали необычный материал. Его удельная теплоемкость c зависит от температуры t в шкале Цельсия по закону: $c(t)=c_0(1+\gamma t)$, где $c_0=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг$\cdot$град) и $\gamma=0{,}05$ град$^{-1}$ – известные постоянные. Образец данного материала массой $m=0{,}5$ кг и начальной температурой $t_0=0°$C бросают в воду массой $2m$ и температурой $t_1=45°$C. Какая установится температура? Удельная теплоемкость воды $c=2c_0=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг$\cdot$град), потерями тепла пренебречь.

Решения. Критерии оценивания задач

1. Понятно, что лампочка, рассчитанная на работу в бытовой сети, перегореть не может, поскольку приложенное к ней напряжение будет заведомо меньше ее номинального напряжения. А вот лампа от карманного фонарика может перегореть, если сила электрического тока, протекающего через нее, будет больше ее рабочего тока. Поэтому идея решения задачи заключается в следующем: используя данные параметры ламп найти их сопротивления, затем ток через лампы в случае их последовательного соединения и подключения к сети. Если сила этого тока меньше рабочего тока лампочки от фонарика, оно не перегорит, если больше, перегорит.

Сопротивления ламп находим из следующих соотношений. Лампа, рассчитанная на работу в сети

$$r_1=\frac{U_1^2}{P_1}=440\ \text{Ом}$$

Лампа от фонарика

$$r_2=\frac{U_2}{I_2}=12{,}5\ \text{Ом}$$

Общее сопротивление лампочек при их последовательном подключении равно

$$R=r_1+r_2=452{,}5\ \text{Ом}$$

Сила тока, текущего через лампы при их последовательном подключении к сети

$$I=\frac{U_1}{R}=0{,}486\ \text{А}$$

Это значение почти в 2 раза больше силы рабочего тока лампы карманного фонарика. Поэтому лампочка перегорит.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Понято, что перегореть может лампочка от фонарика – 0,5 балла.
2. Правильно найдены сопротивления лампочек - 0,5 балла
3. Правильно найден ток через лампочки – 0,5 балла
4. Проведено сравнение найденного тока с рабочим током лампочек, сделан вывод о перегорании лампочки от карманного фонарика – 0,5 балла

2. Докажем, что облако остается однородным с течением времени. Для этого рассмотрим все пылинки, которые находятся на расстояниях от r_1 до r_2 от центра облака. Масса этих пылинок равна

$$m=\rho_0 V=\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3-\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)=\rho_0\frac{4}{3}\pi\left(r_2^3-r_1^3\right) \qquad (*)$$

где V - объем сферического слоя с внутренним радиусом r_1, внешним r_2. Через время t после взрыва только эти пылинки окажутся на расстояниях от $r_1+v(r_1)t=r_1(1+Ht)$ до $r_2+v(r_2)t=r_2(1+Ht)$ от центра облака. Действительно, пылинки, находящиеся в начальный момент на расстояниях, бóльших r_2 от центра, имеют бóльшие скорости, улетят дольше пылинок, находящихся на расстоянии r_2, и в этот слой не попадут. Пылинки, находящиеся в начальный момент на расстояниях, меньших r_1 от центра, имеют меньшие скорости и отстанут от пылинок, находящихся на расстоянии r_1. Поэтому в сферическом слое с внутренним радиусом $r_1(1+Ht)$ и внешним $r_2(1+Ht)$ через время t после взрыва окажутся пылинки суммарной массой (*). И, следовательно, плотность пылинок в указанном слое будет равна

$$\rho(t)=\frac{m}{V}=\frac{\rho_0\frac{4}{3}\pi\left(r_2^3-r_1^3\right)}{\frac{4}{3}\pi\left(\left(r_2(1+Ht)\right)^3-\left(r_1(1+Ht)\right)^3\right)}=\frac{\rho_0}{(1+Ht)^3}$$

Таким образом, плотность облака осколков взрыва через время t после взрыва не зависит ни от r_1, ни от r_2, и значит, останется постоянной по всему облаку. Учитывая, что дальше, чем на расстоянии $R(1+Ht)$ от центра облака частиц вообще не будет, получаем окончательно для плотности пыли через время t после взрыва

$$\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{(1+Ht)^3}, & \text{при } r<R(1+Ht)\\ 0, & \text{при } r>R(1+Ht)\end{cases}$$

Такой она будет и в точках на расстоянии $R/2$ от центра взрыва, и в любой другой точке облака осколков.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Доказано, что облако будет однородным в любой момент времени – 0,5 балла.
2. Правильно найден радиус облака в любой момент времени - 0,5 балла
3. Правильно найдена плотность облака внутри облака – 0,5 балла
4. Приведен правильный ответ, включающий в себя обе плотности – ненулевую внутри облака, нулевую – вне – 0,5 балла

3. Для нахождения области, вбивание в которую второго гвоздя сохраняет обруч в равновесии, можно провести следующие рассуждения. Отпустим обруч, не вбивая второй гвоздь, и найдем, как он движется. Тогда те положения второго гвоздя, которые препятствуют такому движению, будут положениями, оставляющими обруч в покое.

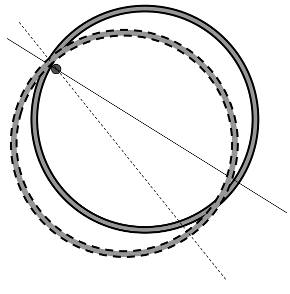


Рис. 1

Очевидно, при отпускании обруч будет вращаться вокруг гвоздя, поскольку одна его точка всегда с гвоздем контактирует, а центр обруча должен опускаться. Т.е. через малое время после отпускания обруч займет положение, показанное пунктиром на рисунке 1 (тонкая прямая линия проходит через гвоздь и центр обруча в первоначальном положении, тонкая пунктирная – через гвоздь и центр обруча спустя малое время после его отпускания). А это значит, что точка обруча, контактирующая с гвоздем, является мгновенным центром вращения обруча, все участки обруча, выделенные на рисунке 2 красным пунктиром, движутся при его отпускании в направлении внутренней области обруча, выделенные зелеными точками – в направлении его внешней области. Поэтому положения второго гвоздя в любой точке внутренней области обруча, выделенной на рисунке красным пунктиром, будут препятствовать рассмотренному движению.

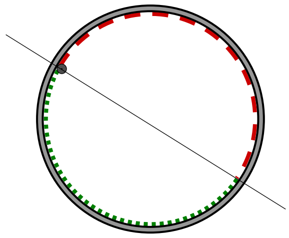


Рис. 2

Однако все-таки не все такие положения второго гвоздя оставят обруч в покое. Дело в том, что при некоторых положениях второго гвоздя, обруч будет двигаться не так, как это описано выше. Если вбить второй гвоздь в любые точки стены, лежащие около его левой части выше первого гвоздя (выделено желтым на рисунке 3), то обруч при отпускании будет поворачиваться относительно именно этого (второго) гвоздя. Поэтому данные положения второго гвоздя нужно исключить из найденной на рисунке 2 области вбивания второго гвоздя, оставляющие обруч в покое (из области красного пунктира на рисунке 2).

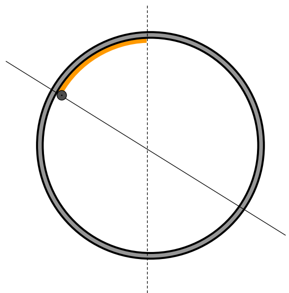


Рис. 3

В результате находим окончательно, что те точки внутри обруча, при вбивании гвоздя в любую из которых обруч останется в равновесии, лежат от верхней точки обруча до точки на том диаметре обруча, который проходит через первый гвоздь (рис. 4; выделено на рисунке красным).

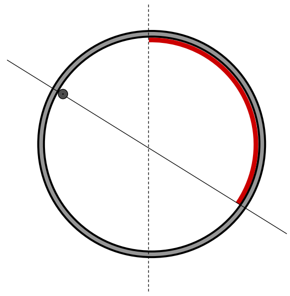


Рис. 4

Интересно отметить, что найденное решение остается справедливым и в том случае, когда первый гвоздь расположен внутри обруча в его нижней половине (рис. 5). И в этом случае положения второго гвоздя внутри обруча, сохраняющие обруч в покое, лежат от верхней точки обруча до диаметра, проходящего через первый гвоздь. Действительно, в этом случае верхний и нижний гвоздь меняются местами, и мы получаем такое же положение гвоздей, которое показано на рисунке 4 с заменой правой части обруча на левую.

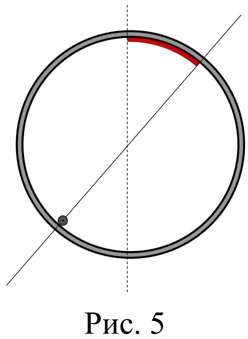


Рис. 5

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильно выстроена логика определения нужной области – либо как описано выше, либо с использованием формальных уравнений статики – 0,5 балла.
2. Правильно определена (и обоснована) нижняя граница искомой области – в точке пересечения обруча диаметром, проходящим через гвоздь - 0,5 балла
3. Правильно определена верхняя граница искомой области самая высокая точка обруча – 0,5 балла

4. Точные обоснования всех предыдущих пунктов – 0,5 балла

4. Чтобы лампочки горели нормальным накалом, к каждой должно быть приложено ее номинальное напряжение – $U = 110$ В. Но у нас имеется электрическое напряжение $U_1 = 220$ В, поэтому нужно соединить наши лампы в два «блока», с одинаковыми сопротивлениями. Тогда их последовательное соединение и подключение к ним источника приведет к тому, что на каждом блоке будет рабочее напряжение ламп. Поэтому каждый блок должен состоять из параллельно соединенных ламп, тогда все они и будут гореть нормальным накалом.

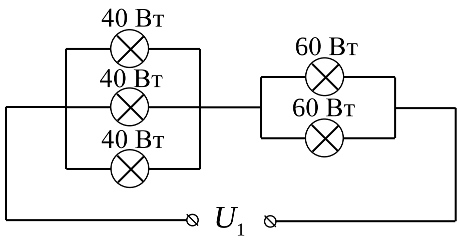
Итак, из ламп нужно составить два блока с одинаковыми сопротивлениями. Найдем сопротивление каждой лампы. Лампы рассчитаны на напряжение $U = 110$ В. Это значит, что при приложении к лампе напряжения $U = 110$ В в ней будет выделяться номинальная мощность. Поэтому согласно закону Джоуля-Ленца имеем для сопротивления лампы.

$$r = \frac{U^2}{P} \qquad (*)$$

Из формулы (*) находим сопротивления наших ламп

$$r_{40} = \frac{110^2}{40} \quad (\text{Ом}) \qquad\qquad r_{60} = \frac{110^2}{60} \quad (\text{Ом}) \qquad (**)$$

где r_{40} и r_{60} - сопротивления ламп с номинальной мощностью 40 и 60 ватт. Из формулы (**) заключаем, что сопротивление лампы с номинальной мощностью 40 ватт составляет 2/3 от сопротивления лампы с номинальной мощностью 60 ватт. А это значит, что общее сопротивление трех параллельно соединенных ламп с номинальной мощностью 40 ватт равно общему сопротивлению двух параллельно соединенных ламп с номинальной мощностью 60 ватт. Если соединить два этих блока последовательно и подключить к ним напряжение $U_1 = 220$ В (см. рисунок), на каждой лампе будет ее рабочее напряжение, и все они будут гореть нормальным накалом.



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильно понята основная идея построения цепи – конструирование двух участков с одинаковыми сопротивлениями – 0,5 балла
2. Правильно понято, что эти участки должны содержать параллельно соединенные элементы – 0,5 балла.
3. Правильно построена искомая цепь – 0,5 балла
4. Обоснованы все предыдущие пункты – 0,5 балла

5. Пусть пластинка в единицу времени получает от потока солнечных лучей энергию Q. В установившемся режиме вся эта энергия должна быть отдана окружающей среде. Вблизи пластинки установится некоторое распределение температуры воздуха – около самой пластинки воздух будет иметь температуру, равную температуре пластинники, вдали – температуру окружающей среды. Поэтому потоки тепла от освещенной и теневой сторон пластинки в окружающую среду будут пропорциональны разности температур пластинки и окружающей среды. Поскольку пластинка тонкая, потоком тепла от боковой части пластинки можно пренебречь. Поэтому условие теплового равновесия дает

$$Q=\kappa\left(t_1-t_0\right)+\kappa\left(t_2-t_0\right) \qquad (*)$$

где коэффициент пропорциональности κ зависит от геометрии пластинки и теплопроводности воздуха, но не зависит от температур пластинки и окружающего воздуха (поскольку геометрия освещенной и теневой стороны одинакова, то этот коэффициент одинаков для обеих сторон пластинки).

С другой стороны, нагрев неосвещенной стороны пластинки связан с теплопроводностью вещества самой пластинки, и то тепло, которое отдает ее неосвещенная часть, равно количеству теплоты переданному от освещенной части неосвещенной. Применяя закон Фурье к теплопроводности самой пластинки, получаем

$$\kappa\left(t_2-t_0\right)=\frac{\lambda}{d}\left(t_1-t_2\right) \qquad (**)$$

где λ - коэффициент теплопроводности материала пластинки, d - ее толщина. Для пластинки удвоенной толщины соотношения, аналогичные соотношениям (*), (**) имеют вид

$$\begin{aligned}&Q=\kappa\left(t_1'-t_0\right)+\kappa\left(t_2'-t_0\right)\\&\kappa\left(t_2'-t_0\right)=\frac{\lambda}{2d}\left(t_1'-t_2'\right)\end{aligned} \qquad (***)$$

где t_1' и t_2' - температуры освещенной и теневой сторон пластинки удвоенной толщины. Приравнивая первое из уравнений (***) уравнению (*) и деля второе из уравнений (***) на уравнение (**), получим

$$\begin{cases}t_1'+t_2'=t_1+t_2\\-t_1'\left(t_2-t_0\right)+t_2'\left(2t_1-t_2-t_0\right)=2t_0\left(t_1-t_2\right)\end{cases} \qquad (4*)$$

Решение системы (4*) имеет вид

$$t_1'=\frac{\left(t_1+t_2\right)\left(2t_1-t_0-t_2\right)-2t_0\left(t_1-t_2\right)}{2\left(t_1-t_0\right)}=52°C \qquad t_2'=\frac{\left(t_1+t_2\right)\left(t_2-t_0\right)+2t_0\left(t_1-t_2\right)}{2\left(t_1-t_0\right)}=28°C$$

(систему уравнений (4*) проще решить «в числах» - вычислить коэффициенты и правые части через данные температуры, а затем решить).

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – условия теплового равновесия и закон Фурье для теплоотдачи – 0,5 балла
2. Правильное применение указанных уравнений в первом случае (к одной пластинке) - 0,5 балла.
3. Правильное применение указанных уравнений к случаю двух пластин; получение правильной системы уравнений – 0,5 балла.
4. Правильное решение, правильные вычисления – 0,5 балла

6. Пусть установившаяся температура воды в стакане равна t_x. Тогда вода отдает количество теплоты, равное

$$Q = 2mc\left(t_1 - t_x\right) = 4mc_0\left(t_1 - t_x\right)$$

Поскольку потерь тепла нет, это количество теплоты получит материал с переменной теплоемкостью. Чтобы рассчитать, к какому изменению температуры приведет это тепло, разделим температурный интервал $t_x \div t_0$ на такие малые интервалы Δt_i, внутри каждого из которых теплоемкость секретного материала можно считать постоянной. Тогда количество теплоты, полученное секретным материалом, есть сумма количеств теплоты, полученных на каждом малом интервале, а последние могут быть найдены по стандартной формуле. Поэтому имеем

$$Q = \sum_i mc\left(t_i\right)\Delta t_i = mc_0\left(\sum_i \Delta t_i + \gamma \sum_i t_i \Delta t_i\right)$$

Первая сумма скобках равна полному изменению температуры $t_x - t_0 = t_x$ (все температуры заданы в градусах Цельсия. Вторая сумма в скобках аналогично сумме, которую приходится вычислять при вычислении работы силы упругости, и которая вычисляется графически. Применяя здесь аналогичные соображения находим эту сумму

$$\sum_i t_i \Delta t_i = \frac{1}{2} t_x^2$$

Отсюда получаем уравнение для искомой температуры t_x

$$\gamma t_x^2 + 10 t_x - 8 t_1 = 0 \qquad (*)$$

Решая квадратное уравнение (*), находим

$$t_x = \frac{-10 + \sqrt{100 + 32\gamma t_1}}{2\gamma} = 31{,}2^\circ\,\mathrm{C}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – использование уравнений теплового баланса для каждой малой передачи тепла – 0,5 балла
2. Правильное использование уравнений теплового баланса для малых изменений температуры - 0,5 балла.
3. Графический способ вычисления указанной суммы – 0,5 балла.
4. Правильное решение, правильные вычисления – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.