Решения и критерии оценивания
Задач очного отборочного тура
Инженерной олимпиады школьников, 11 класс,
2018-2019 учебный год. Комплект 1

1. В бензиновом двигателе за секунду сгорает $\Delta m = 0,5$ г бензина. Треть теплоты сгорания превращается двигателем в механическую работу, две трети в виде тепла передаются охлаждающей двигатель воде. Эта вода течет по трубке, многократно опоясывающей двигатель. Площадь сечения трубки $S = 1$ см^2. В установившемся режиме разность температур воды на входе и выходе из системы охлаждения равна $\Delta T = 20°$ С. Найти скорость течения воды в трубке. Считать, что все отданное двигателем тепло поглощается водой системы охлаждения. Удельная теплота сгорания бензина $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$град), плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Решение. Пусть скорость течения воды в трубке v. Тогда за малый интервал времени Δt в трубку втекает масса воды $\Delta\mu = \rho S v \Delta t$. Такое же количество и вытекает из трубки, так как вода нигде не накапливается. Следовательно, за этот интервал времени из двигателя уносится следующее количество теплоты

$$\delta Q = c\Delta\mu\Delta T = c\rho S v \Delta t \Delta T$$

c - удельная теплоемкость воды. С другой стороны, за рассматриваемый интервал времени в двигателе выделится $\delta Q = q\Delta m \Delta t$ из которых 2/3 будет передано воде. Отсюда

$$\frac{2}{3} q\Delta m = c\rho S v \Delta T \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{2q\Delta m}{3c\rho S\Delta T} = 1{,}83 \text{ м/с.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильно найдено количество теплоты, выделяемое в двигателе за некоторый интервал времени Δt – 0,5 балла
2. Правильно найдена масса воды, которая протекает по системе охлаждения за интервал времени Δt – 0,5 балла
3. Правильно найдено количество теплоты, которое нужно, чтобы нагреть охлаждающую воду на ΔT – 0,5 балла
4. Правильный ответ для скорости течения воды в системе охлаждения. Верные вычисления – 0,5 балла

2. Елочная гирлянда состоит из 15 одинаковых лампочек номинальной мощностью $P_1 = 5$ Вт каждая, соединенных последовательно, причем при включении в электрическую сеть все лампочки светят нормальным накалом. 5 лампочек заменили лампочками, рассчитанными на то же напряжение, но с номинальной мощностью $P_1/2 = 2,5$ Вт каждая. Как изменилось полная мощность, потребляемая гирляндой при включении ее в ту же электрическую сеть? Найти мощность, потребляемую старой и новой лампочкой в такой гирлянде?

Решение. Пусть номинальное напряжение каждой из пятнадцати старых лампочек равно U_0. Тогда, поскольку лампочки горели нормальным накалом, напряжение сети равно

$$U = NU_0$$

($N = 15$), сопротивление каждой лампочки -

$$r_1 = \frac{U_0^2}{P_1},$$

а полная выделяемая мощность –

$$P_{ст} = NP_1.$$

Поскольку лампочки-заменители рассчитаны на то же напряжение, но имеют номинальную мощность $P_2 = P_1 / 2$, сопротивление каждой новой лампочки есть

$$r_2 = \frac{U_0^2}{P_2}$$

и, следовательно, общее сопротивление новой цепи будет равно

$$R = \left(N-k\right) r_1 + kr_2 = U_0^2 \left(\frac{N-k}{P_1} + \frac{k}{P_2}\right)$$

($k = 5$). Поэтому полная мощность, выделяемая в новой цепи будет равна

$$P_{нов} = \frac{U^2}{R} = \frac{N^2}{\left(\frac{N-k}{P_1} + \frac{k}{P_2}\right)} = \frac{N^2 P_1 P_2}{\left(N-k\right) P_2 + kP_1}$$

Поскольку мощность новых лампочек составляет половину старых, имеем

$$P_{нов} = \frac{N^2 P_1 P_2}{\left(N-k\right) P_2 + kP_1} = \frac{N^2 P_1}{N+k} = \frac{N}{N+k} P_{ст} = \frac{3}{4} P_{ст} = 56{,}3 \text{ Вт}$$

Таким образом, выделяемая в новой цепи мощность составляет три четверти от мощности, выделяемой в старой.

Найдем теперь, какая мощность будет выделяться на старых и новых лампочках в новой цепи. Поскольку ток, текущий через лампочки одинаков (последовательное соединение), а сопротивление каждой новой лампочки в 2 раза больше сопротивления старой, из закона Джоуля-Ленца заключаем, что мощность, выделяемая на каждой новой лампочке, будет в 2 раза больше мощности, выделяемой на каждой старой. Поэтому

$$\left(N-k\right) P_1^{нов} + kP_2^{нов} = P_{нов} \qquad \Rightarrow \qquad 10P_1^{нов} + 2 \cdot 5P_1^{нов} = \frac{3}{4} 15P_1 \qquad \Rightarrow \qquad P_1^{нов} = \frac{45}{80} P_1 = 2{,}8 \text{ Вт}$$

$$P_2^{нов} = \frac{45}{40} P_1 = 5{,}6 \text{ Вт}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

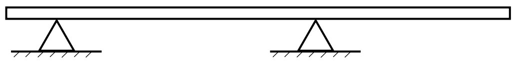
1. Правильно найдены сопротивления старой и новой лампочки – 0,5 балла.

2. Правильно найдена полная мощность, выделяемая во всей цепи - 0,5 балла

3. Правильно найдена мощность, выделяемая на старой лампочке в новой цепи – 0,5 балла

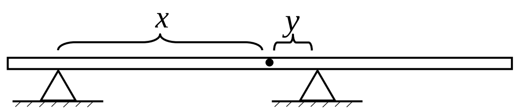
4. Правильно найдена мощность, выделяемая на новой лампочке – 0,5 балла

3. Доска лежит горизонтально на двух точечных опорах. Расстояние между опорами равно половине длины доски.



Чтобы перевернуть доску относительно одной опоры к концу доски необходимо приложить силу F, направленную вертикально вниз. Чтобы перевернуть доску относительно другой опоры к ее второму концу необходимо приложить силу $2F$, направленную вертикально вниз. Найти массу доски.

Решение. Пусть длина доски - L, расстояние от опор до центра тяжести доски - x и y (см. рисунок; центр тяжести доски обозначен точкой).



Тогда условие переворота относительно левой опоры дает

$$2F\left(\frac{L}{2}-x\right)=mgx \qquad (*)$$

А условие переворота относительно правой опоры

$$F\left(\frac{L}{2}-y\right)=mgy$$

Учитывая, что $y=L/2-x$, из второго равенства получим

$$Fx=mg\left(\frac{L}{2}-x\right) \qquad (**)$$

Перемножая равенства (*) и (**), найдем

$$2F^2=(mg)^2.$$

Откуда

$$m=\frac{\sqrt{2}F}{g}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

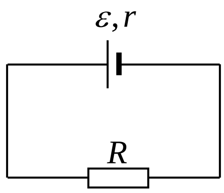
1. Правильная идея – использовать уравнения статики (уравнения моментов) для нахождения условий переворачивания доски – 0,5 балла

2. Правильно написаны условия переворачивания доски через первую и вторую опору – 0,5 балла.

3. Правильная система уравнений (*) и (**) для нахождения массы доски – 0,5 балла

4. Правильный ответ – 0,5 балла

4. Термины «источник тока» и «источник напряжения» часто используются одинаково для обозначения прибора создающего электрическое напряжение. Тем не менее, их смысл немного разный. «Источник тока» - прибор, дающий силу тока через подключенный резистор, слабо зависящую его сопротивления. «Источник напряжения» - прибор, создающий на подключенном к нему резисторе напряжение, слабо зависящее от его сопротивления. Какими должны быть параметры источника (ЭДС и сопротивление), чтобы его можно было считать источником тока или источником напряжения.



Решение. Пусть ЕДС источника ε, внутреннее сопротивление r. Подключим к источнику сопротивление R (нагрузку) и найдем ток и напряжение на нагрузке. По закону Ома для замкнутой цепи имеем для силы тока через нагрузку

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \qquad (*)$$

а по закону Ома для участка цепи - для напряжения на нагрузке

$$U = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r} \qquad (**)$$

Чтобы сила тока слабо зависела от сопротивления нагрузки R, нужно, чтобы внутреннее сопротивление источника было много больше сопротивления нагрузки. Действительно, если $r \gg R$, величиной R в знаменателе формулы (*) можно пренебречь по сравнению с внутренним сопротивлением источника r, и сила тока через нагрузку

$$I \approx \frac{\varepsilon}{r}$$

не будет зависеть от сопротивления нагрузки. Таким образом, источник дает фиксированный ток через нагрузку независимо от ее сопротивления (т.е. является источником тока), если его внутреннее сопротивление много больше сопротивления подключаемых к нему нагрузок.

Напряжение на нагрузке не будет зависеть от сопротивления в случае выполнения обратного неравенства. Действительно, если сопротивление нагрузки много больше сопротивления источника ($R \gg r$), то сопротивлением r в знаменателе формулы (**) можно пренебречь по сравнению с сопротивлением R, а после этого сократить величину R

$$U = \frac{\varepsilon R}{R + r} \approx \frac{\varepsilon R}{R} = \varepsilon$$

Таким образом, если внутреннее сопротивление источника много меньше сопротивления нагрузки, источник дает фиксированное напряжение на нагрузке независимо от ее сопротивления (т.е. является источником напряжения). Именно такими являются бытовые электрические сети, обеспечивающие напряжение 220 В на любой нагрузке.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

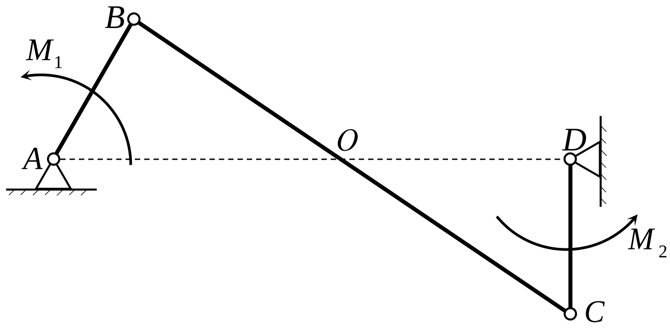
1. Правильная идея – используя закон Ома для замкнутой цепи и участка цепи исследовать ситуацию, когда ток и напряжение слабо зависят от сопротивления нагрузки – 0,5 балла

2. Правильно найдены ток и напряжение на нагрузке - 0,5 балла.

3. Правильно сделаны и обоснованы приближения – 0,5 балла.

4. Правильные выводы – 0,5 балла

5. Три стержня AB, BC и CD, входящие в состав трехзвенного механизма, связаны шарнирами B и C. При этом $AB = CD = b$. В точках A и D стержни шарнирно прикреплены к опорам; при этом $BC = AD = 3b$. Механизм находится в равновесии под действием моментов сил M_1 и M_2, приложенных к звеньям AB и CD. Найти отношение M_1 / M_2, если все звенья механизма лежат в одной плоскости и $CD \perp AD$. Весом стержней пренебречь.



Решение. Поскольку стержень AB находится в равновесии, со стороны стержня BC на него действует сила натяжения, компенсирующая внешний момент. Поскольку угол ABC – прямой, имеем

$$M_1 = Tb$$

где T - сила натяжения стержня. Так как такая же сила натяжения действует и на второй конец стержня, условие равновесия стержня DC дает

$$M_2 = Tb\sin\left(\angle DCB\right)$$

Найдем $\sin\left(\angle DCB\right)$. Плоский четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны, но не параллельны, называется антипараллелограммом. Легко доказать, что у антипараллелограмма попарно равны углы. Действительно, если сделать дополнительное построение – провести отрезок AC, то треугольники ABC и ADC равны (по трем сторонам). Следовательно, угол ADC – прямой, и $BO = OD$. Поэтому, если обозначить $OD{=}x$, то OB - тоже равно x, $OC = BC - x = a\text{-}x$, (где обозначено $BC = a$) и по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = \left(a - x\right)^2 - b^2$$

Отсюда

$$OD = x = \frac{a^2 - b^2}{2a},\ OD = a - x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

Поэтому

$$\sin\left(\angle DCB\right) = \frac{OD}{OC} = \frac{x}{a - x} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

И, следовательно,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{\sin\left(\angle DCB\right)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

Поскольку по условию $a = 3b$, найдем

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{5}{4}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильные условия равновесия стержней механизма – 0,5 балла.

2. Геометрическое доказательство попарного равенства углов и того, что $BO=OD$ - 0,5 балла

3. Правильно найден $\sin(\angle DCB)$ - 0,5 балла

4. Правильный ответ для отношения моментов – 0,5 балла.

6. В закрытом сосуде объемом $V=1$ л содержится $M=900$ г воды при температуре $t_0=100°$ С. Воде сообщают количество теплоты $Q=1$ кДж. Считая, что давление насыщенных паров воды вблизи температуры t_0 зависит от температуры по закону $p_{нас}(t)=p_0+\alpha(t-t_0)$, где $p_0=10^5$ Па, $\alpha=0,04\cdot10^5$ Па/град, оценить, сколько воды испарилось при этом. Удельная теплоемкость воды $c=4,2\cdot10^3$ Дж/(кг$\cdot$град), удельная теплота парообразования воды $r=2,3\cdot10^6$ Дж/кг, универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль$\cdot$град).

Решение. Так как вода находится в закрытом сосуде, в сосуде находится насыщенный водяной пар, а вода не кипит. Поскольку температура воды $t_0=100°$ С - давление пара в сосуде равно атмосферному $p_0=10^5$ Па. Поэтому закон Клапейрона-Менделеева для пара дает

$$p_0 v=\frac{m}{\mu}RT_0$$

где v - объем пара в сосуде (объем сосуда минус объем воды), m - масса водяного пара в первоначальном состоянии, $\mu=0,018$ кг/моль – молярная масса воды, $T_0=373$ К – абсолютная температура кипения воды.

Когда воде сообщают дополнительное количество тепла часть воды испаряется, давление насыщенного пара становится больше атмосферного и вода нагревается до температуры выше $t_0=100°$ С (температуры кипения при атмосферном давлении). Поэтому сообщенное тепло тратится и на нагревание воды, и на ее испарение. Пусть при сообщении тепла Q испарилось Δm воды, а вода нагрелась на Δt. Тогда

$$Q=cM\Delta t+r\Delta m \qquad (*)$$

(здесь мы пренебрегли изменением массы воды из-за испарения). С другой стороны закон Клапейрона-Менделеева для насыщенного водяного пара дает

$$(p_0+\Delta p)v=\frac{m+\Delta m}{\mu}R(T_0+\Delta t).$$

где Δp - приращение давления насыщенного пара с ростом его температуры на Δt. Отсюда находим

$$\Delta p v = \frac{\Delta m}{\mu} R T_0 + \frac{m}{\mu} R \Delta t$$

С другой стороны, согласно данной в условии зависимости $\Delta p = \alpha \Delta t$. Поэтому

$$\alpha v \Delta t = \frac{\Delta m}{\mu} R T_0 + \frac{m}{\mu} R \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{R T_0 \Delta m}{\mu \alpha v - m R}$$

В результате из первого закона термодинамики (*) находим

$$\Delta m = \frac{Q}{cM \dfrac{R T_0}{\mu \alpha v - m R} + r}$$

Учитывая, что $m = \mu p_0 v / R T_0$, последнюю формулу можно привести к виду

$$\Delta m = \frac{Q}{\dfrac{c M R T_0^2}{\mu v \left(\alpha T_0 - p_0 \right)} + r}$$

Проведем вычисления, используя следующие данные: $Q = 1 \cdot 10^3$ Дж, $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг $\cdot$ град), $M = 0,9$ кг, $R = 8,3$ Дж/(моль $\cdot$ град), $T_0 = 373$ К, $\mu = 0,018$ кг/моль, $v = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м^3, $\alpha = 0,04 \cdot 10^5$ Па/град, $p_0 = 10^5$ Па, $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Имеем

$$\Delta m = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильное использование первого закона термодинамики – 0,5 балла.

2. Связь количества испарившейся воды и увеличения давления из закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла

3. Верная формула для количества испарившейся воды – 0,5 балла.

4. Верный порядок ответа – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.