Решения и критерии оценивания

Задач очного отборочного тура

Инженерной олимпиады школьников, 9-10 класс,

2017-2018 учебный год

1. (1 балл) Три насоса откачивают воду из шахтного водосборника (резервуара, в котором скапливаются просачивающиеся в шахту грунтовые воды). Производительности насосов (объем откачанной за час воды) относятся как 1:2:4. При этом за время $t = 3$ часа третий насос откачал на $\Delta V = 9$ м^3 воды больше, чем второй. Найти производительности насосов.

Решение. Пусть производительности насосов p_1, p_2 и p_3. Имеем из условия

$$\begin{cases} 2p_1 = p_2 \\ 2p_2 = p_3 \\ (p_3 - p_2)t = \Delta V \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$p_1 = \frac{\Delta V}{2t} = 1{,}5 \text{ м}^3/\text{ч}, \qquad p_2 = \frac{\Delta V}{t} = 3 \text{ м}^3/\text{ч}, \qquad p_3 = \frac{2\Delta V}{t} = 6 \text{ м}^3/\text{ч}$$

Критерии оценивания:

1. Записаны правильные уравнения для производительности насосов. - 0,5 балла

2. Верное решение системы уравнений – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 1 балл

2. (2 балла) Имеется водный раствор серной кислоты неизвестной концентрации. Из раствора взяли пятую часть и выпарили из нее воду до двукратного увеличения процентного содержания в ней кислоты. После того как этот выпаренный раствор вернули назад, процентное содержание кислоты в растворе стало равно 40 %. Найти процентное содержание кислоты в первоначальном растворе. Считать, что при выпаривании испарялась только вода, но не кислота.

Решение. Пусть масса кислоты в растворе m, масса раствора (до выпаривания воды) M. Тогда концентрация раствора до выпаривания равна

$$C = \frac{m}{M}$$

Для выпаривания мы взяли $0,2M$ (содержащих $0,2m$ кислоты) и выпарили так, что концентрация этой порции раствора возросла вдвое. Для этого полная масса выпариваемого раствора должна уменьшится вдвое – т.е. стать $0,1M$. Поэтому полная масса раствора (после смешивания) равна $0,8M + 0,1M = 0,9M$, при условии, что масса кислоты в растворе не изменилась. Поэтому новая концентрация раствора равна

$$C_1 = \frac{m}{0,9M} = \frac{C}{0,9}$$

Отсюда

$$C = 0,9C_1 = 36\%$$

Критерии оценивания:

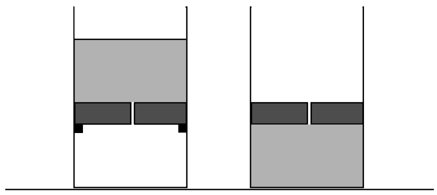
1. Использованы правильное определение концентрации – 0,5 балла.

2. Найдено изменение количества воды в выпариваемой порции - 0,5 балла

3. Найдено изменение массы раствора и его концентрации – 0,5 балла

2. Правильные вычисления – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла



3. (2 балла) В цилиндрическом сосуде площадью сечения $S = 200$ см^2 закреплен поршень массой $m = 2$ кг, в котором сделано маленькое отверстие. Если на поршень налить слой воды толщиной $h = 10$ см, вода начнет вытекать через отверстие со скоростью $v = 1$ мл/с (левый рисунок). За какое время поршень опустится на дно сосуда, если его освободить, на дно сосуда налить слой воды толщиной $h = 10$ см, а поршень положить сверху на воду (правый рисунок). Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует, но вода между стенками сосуда и поршнем просачиваться не может.

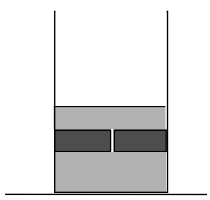
Решение. Очевидно, количество воды, протекающей в единицу времени через малое отверстие (расход воды), определяется перепадом давлений в жидкости до и после отверстия. При том же самом перепаде давлений и площади отверстия расход воды будет тем же самым. Давайте найдем перепад давлений в первом и втором случае.

В первом случае в момент начала вытекания воды перепад давлений определяется высотой столба воды над поршнем и равен

$$\Delta p_1 = \rho g h = 10^3 \text{ Па}$$

Во втором случае избыточное давление под поршнем создается благодаря его притяжению к земле и равно

$$\Delta p_2 = \frac{mg}{S} = 10^3 \text{ Па}$$



При этом этот перепад давлений во втором случае не меняется в процессе перетекания воды. Действительно, когда часть воды перетечет из-под поршня, давление под поршнем увеличится и станет равно избыточному давлению, создаваемым поршнем, плюс давление столба перетекшей жидкости (см. рисунок). Но на величину давления столба перетекшей жидкости увеличится и давление воды перед отверстием. Поэтому перепад давлений до и после отверстия не меняется в процессе перетекания воды, и, следовательно, не меняется и скорость перетекания воды.

Отсюда находим время перетекания воды

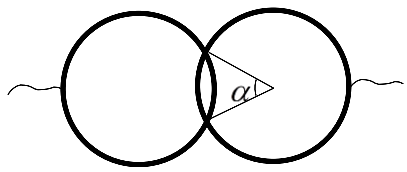
$$t = \frac{V}{v} = \frac{hS}{v} = 2 \cdot 10^3 \text{ секунд}$$

Критерии оценивания:

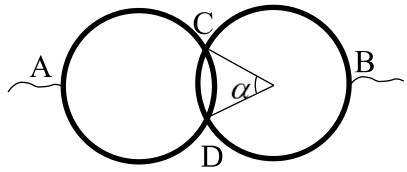
1. Если школьник пытается вычислить перепад давлений и говорит в каком-то виде о зависимости скорости перетекания от этого перепада – 0,5 балла.
2. Использование утверждения (явное или неявное), что во втором случае скорость перетекания воды постоянна – 0,5 балла.
3. Доказательство утверждения, что скорость перетекания воды во втором случае постоянна – 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла.

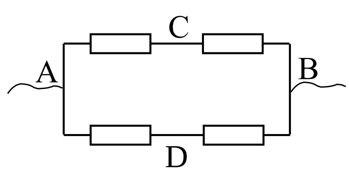
Максимальная оценка за задачу – 2 балла

4. (2 балла) Два кольца радиуса R изготовлены из одной и той же проволоки. Сопротивление проволоки, из которой изготовлено каждое кольцо, равно r. Кольца накладывают друг на друга так, что точки их касания опираются на сектор с углом раствора $\alpha = \pi/3$. В точках контакта колец обеспечен хороший электрический контакт между ними. Кольца включают в электрическую цепь точками, наиболее удаленными от области пересечения (см. рисунок). Найти сопротивление колец.



Решение. Поскольку электрическое составленная из колец цепь симметрична относительно прямой, проходящей через точки A и B, поэтому ток между точками C и D (см. рисунок) не потечет, и эти участки можно выбросить из цепи без изменения ее сопротивления. Поэтому данная цепь эквивалентна цепи, показанной на следующем рисунке, причем сопротивления резисторов равны сопротивлениям проводов AC (или CB, или AD, или DB).





Эти сопротивления найдем из следующих соображений. Очевидно, что длины дуг CD равны $\pi R/3$ (как дуг, опирающихся на угол $\pi/3$). Поэтому длина участка AC (или CB, или AD, или DB) равна $\pi R - \pi R/6 = 5\pi R/6$. А поскольку сопротивление проволоки пропорционально ее длине, сопротивление этих участков r_x найдем из пропорции

$$\begin{array}{ccc} 2\pi R & - & r \\ \frac{5\pi R}{6} & - & r_x \end{array}$$

Отсюда находим

$$r_x = \frac{5r}{12}$$

Используя далее правила нахождения общих сопротивлений при последовательном и параллельном соединении проводников, получим для сопротивления цепи из колец

$$r_0 = \frac{5r}{12}$$

Критерии оценивания:

1. Нарисована эквивалентная схема – 0,5 балла
2. Выброшены (с обоснованием) два центральных сопротивления – о,5 балла
3. Использованы правильные формулы нахождения эквивалентного сопротивления параллельных и последовательных проводников – 0,5 балла
4. Верные вычисления – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

5. (2 балла) Имеется два сосуда, содержащих одинаковые массы горячей и холодной воды ($t_1 = 50°$ С и $t_2 = 10°$ С). Порцию холодной воды перелили в сосуд с горячей водой и перемешали. Температура горячей воды уменьшилась на $\Delta t = 10°$ С. После этого такую же порцию горячей воды перелили в сосуд с холодной и перемешали. Затем эту процедуру повторяют. Сколько таких парных переливаний таких же порций воды («туда-сюда») нужно сделать, чтобы разность температур воды в сосудах была меньше $1°$ С. Теплопотерями пренебречь.

Решение. Очевидно, что в первый раз после возвращения горячей воды в сосуд с холодной водой ее температура возрастет на такую же величину $\Delta t = 10°$, на которую охладилась горячая вода. Действительно. Пусть масса воды в сосудах m. После одной пары переливаний «туда-сюда» она будет также равна m, но температура воды в горячем сосуде будет меньше на величину Δt. А значит, в течение одной пары переливаний вода в этом сосуде отдаст количество теплоты $Q = cm\Delta t$ (c - удельная теплоемкость воды), которое примет вода в холодном сосуде. А поскольку ее масса такая же, она нагреется на ту же величину Δt. Таким образом, разность температур воды в сосудах после одной пары переливаний «туда-сюда» уменьшится вдвое: была $t_1 - t_2 = 40°$, стала $(t_1 - t_2)_1 = t_1 - t_2 - 2\Delta t = 20°$ (где символом $(t_1 - t_2)_1$ обозначена разность температур после одной пары переливаний «туда-сюда»).

Очевидно, новая разность температур пропорциональна старой разницы с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от масс воды в сосуде и переливаемой воды. Действительно, согласно уравнению теплового баланса передаваемые количества теплоты линейно зависят от температур, при этом новая разность температур (после одной пары переливаний) должна обращаться в нуль, если первоначальные температуры воды в сосудах одинаковы. Т.е.

$$\left(t_1-t_2\right)_1=\alpha\left(t_1-t_2\right) \tag{1}$$

где коэффициент пропорциональности α зависит только от масс воды в сосуде и переливаемой воды, но не от температур воды в сосудах (формулу (1) можно доказать и непосредственным использованием уравнения теплового баланса). А поскольку во второй раз переливались те же массы воды, то разность температур воды в сосудах после второй пары переливаний $\left(t_1-t_2\right)_2$ будет во столько же раз меньше величины $\left(t_1-t_2\right)_1$, во сколько раз она меньше величины t_1-t_2. А поскольку, как это следует из данных условия

$$\left(t_1-t_2\right)_1=\frac{1}{2}\left(t_1-t_2\right)$$

то для разности температур воды в сосудах после второй пары переливаний $\left(t_1-t_2\right)_2$ получим

$$\left(t_1-t_2\right)_2=\frac{1}{2}\left(t_1-t_2\right)_1=\frac{1}{4}\left(t_1-t_2\right)$$

Продолжая переливания, получим для разности температур после n пар переливаний

$$\left(t_1-t_2\right)_n=\frac{1}{2^n}\left(t_1-t_2\right)$$

Далее действуем подбором:

одна пара переливаний $\left(t_1-t_2\right)_1=\frac{1}{2}\left(t_1-t_2\right)=20°\ \text{C}$

две пары переливаний $\left(t_1-t_2\right)_2=\frac{1}{4}\left(t_1-t_2\right)=10°\ \text{C}$

три пары переливаний $\left(t_1-t_2\right)_3=\frac{1}{8}\left(t_1-t_2\right)=5°\ \text{C}$

четыре пары переливаний $\left(t_1-t_2\right)_4=\frac{1}{16}\left(t_1-t_2\right)=2{,}5°\ \text{C}$

пять пар переливаний $\left(t_1-t_2\right)_5=\frac{1}{32}\left(t_1-t_2\right)=1{,}25°\ \text{C}$

шесть пар переливаний $\left(t_1-t_2\right)_6=\frac{1}{64}\left(t_1-t_2\right)=0{,}625°\ \text{C}$

Т.е. чтобы разность температур воды в сосудах стала меньше одного градуса, нужно сделать шесть пар переливаний воды «туда-сюда».

Критерии оценивания

1. Если участник правильно использовал уравнение теплового баланса для однократного переливания туда-сюда – 0,5 балла.

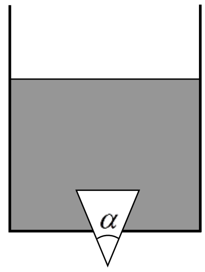
2. правильная идея вычисления разности температур для многих переливаний – новая разность температур после каждого переливания составляет ту же долю от начальной разности температур, что и для первого переливания 1 балл (нарастающим итогом)

3. подбор нужного количества переливаний (реализация с техническими ошибками) – 1,5 балла (нарастающим итогом)

4. правильное решение – 2 балла (нарастающим итогом).

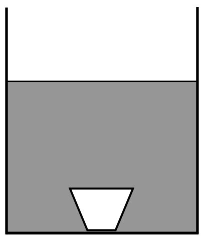
Максимальная оценка за задачу – 2 балла

6. (3 балла) В дне емкости для некоторой жидкости есть круглое отверстие радиуса r. Отверстие затыкают пробкой в форме конуса с углом раствора α и радиусом основания R ($R > r$). При какой максимальной плотности материала пробки, она всплывет при наливании в сосуд жидкости? Плотность жидкости ρ_0 считать известной. **Указание.** Объем конуса определяется формулой: $V = (1/3)\pi r^2 h$, где r - радиус основания конуса, h - высота конуса.



Решение. Пробка всплывет, если сила Архимеда, возникающая при наливании воды, будет больше силы тяжести пробки. Для вычисления силы Архимеда заметим, что вода не окружает пробку со всех сторон, поэтому здесь нельзя использовать формулу $\rho g V$, а нужно явно вычислять равнодействующую сил, действующих на пробку со стороны воды. Можно рассуждать, например, так (рассмотрим сначала случай, когда уровень жидкости выше основания пробки).

Если бы пробка была бы не пробкой, а усеченным конусом, повторяющим ту часть пробки, которая находится выше отверстия (см. рисунок), то сила Архимеда определялась бы формулой $\rho g V_{у.к.}$, где $V_{у.к.}$ - объем усеченного конуса (или его подводной части, если уровень жидкости в сосуде ниже основания конуса). Но верхнее основание и боковая поверхность у нашей пробки такие же, как у усеченного конуса, а вот нижнего основания, но которое действует сила со стороны воды, у пробки нет. А поскольку на нижнее основание усеченного конуса действует сила $\rho g h s$, где h - уровень воды в сосуде, s - площадь нижнего основания (равная площади отверстия πr^2), то выталкивающая сила, действующая на пробку, равна

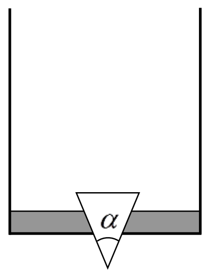


$$F_A = \rho g V_{у.к.} - \rho g h \pi r^2 \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что при увеличении уровня жидкости сила Архимеда уменьшается, а при какой-то глубине даже меняет знак – становится силой, прижимающей пробку ко дну.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда уровень жидкости ниже основания пробки (см. рисунок). Используя ту же логику, что и выше, для силы Архимеда в этом случае получим

$$F_A = \rho g V_{п.ч.у.к.} - \rho g h \pi r^2 \tag{3}$$



где $V_{п.ч.у.к.}$ - объем той части пробки, которая находится в воде («погруженной части усеченного конуса). Очевидно, что при увеличении уровня воды первое слагаемое увеличивается, второе – уменьшается (с учетом знака). Но поскольку уменьшение второго слагаемого при увеличении уровня на величину Δh второе слагаемое уменьшится на $-\rho g \Delta h \pi r^2$, первое увеличится на $\rho g \Delta h \pi r_x^2$ (где r_x - радиус сечения конуса на высоте поверхности жидкости). А поскольку $r_x > r$, то с ростом уровня воды (пока уровень ниже верхнего основания пробки) выталкивающая сила растет. Поэтому выталкивающая сила максимальна, когда уровень воды совпадает с верхним основанием.

Следовательно, максимальная сила Архимеда, действующая на пробку, равна

$$F_A^{\max} = \frac{1}{3}\rho g\left(\pi R^2 H - \pi r^2 h\right) - \rho g \pi r^2 \left(H - h\right) \tag{4}$$

где H - высота конической пробки, h - высота «малого конуса», находящегося ниже уровня отверстия при его затыкании пробкой. Так как $H = R\,\mathrm{ctg}\left(\alpha/2\right)$, а $h = r\,\mathrm{ctg}\left(\alpha/2\right)$, то из (4) получим

$$F_A^{\max} = \frac{1}{3}\rho g \pi\,\mathrm{ctg}\left(\alpha/2\right)\left(R^3 - r^3\right) - \rho g \pi r^2\,\mathrm{ctg}\left(\alpha/2\right)\left(R - r\right) \tag{5}$$

Пробка всплывет, если $F_A^{\max} \ge mg = \frac{1}{3}\rho_0 g \pi R^3\,\mathrm{ctg}\left(\alpha/2\right)$ (ρ_0 - плотность материала пробки). Отсюда находим, что пробка всплывет, если

$$\rho_0 \le \rho\left(1 - \frac{3r^2}{R^2} + \frac{2r^3}{R^3}\right)$$

Критерии оценивания

1. Понято, что сила Архимеда не вычисляется как $\rho g V$, предложена альтернатива – подсчет сил, действующих на боковую поверхность пробки – 0,5 балла.
2. правильная формула для выталкивающей силы – 0,5 балла
3. сформулировано и обосновано условие максимальности выталкивающей силы – 0,5 балла.
4. верная реализация – 0,5 балла.

Максимальная оценка за задачу – 2 балла