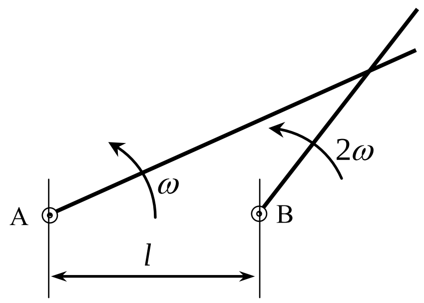
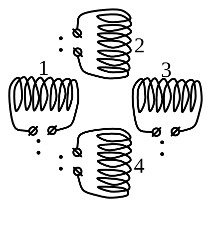
Решения
Задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников,
2017-2018 учебного года,
11 класс

1. (2 балла) Имеется два одинаковых калориметра, в которые налито одинаковое количество воды: в первый – с температурой $t_1 = 20°$С, во второй – с температурой $t_2 = 100°$С. Кроме того, в первом калориметре находится некоторое тело. Когда тело вытаскивают из первого калориметра и перекладывают во второй, в нем устанавливается температура $t_x = 63°$ С. Какая температура установится в первом калориметре, если тело вытащить из второго калориметра и снова опустить в первый? Всеми потерями тепла пренебречь.

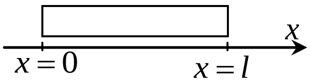
2. (2 балла) Летом в жаркий день (часто в степи или пустыне) можно наблюдать такое явление, когда асфальт дороги становится как будто мокрым, при том, что никакого дождя нет (см. фото). Объясните этот эффект, учитывая, что показатель преломления воздуха убывает с ростом температуры по закону $n(T) = 1 + 0,000292T_0 / T$ ($T_0 = 273$ К). Оцените расстояние, на котором человеку асфальт дороги будет казаться мокрым. Температура асфальта может достигать $60°$С. Необходимые для оценки величины выберите, исходя из знаний, опыта и здравого смысла.



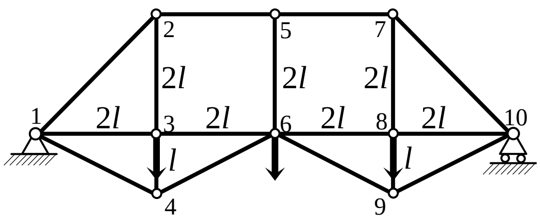
3. (2 балла) Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и 2ω вокруг параллельных осей, проходящих через их концы A и B (см. рисунок). Расстояние между осями l, в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней? Найти скорость и ускорение этой точки через время $t = \pi / 6\omega$ после начала движения. Ответ обосновать.



4. (2 балла) Электродвигатели переменного тока были предложены в конце 19 века Н.Тесла и Г.Феррарисом. Их идея состояла в том, чтобы с помощью переменных токов создать вращающееся магнитное поле, которое заставит вращаться магнит. Для создания такого поля они брали несколько соленоидов, пропускали через них переменные токи одинаковой частоты, но со сдвигом фазы. Рассмотрите систему четырех соленоидов, показанную на рисунке. Пусть в первом соленоиде течет ток $I_1 = A\cos\omega t$. С какими фазовыми сдвигами ($I_i = I_0\cos(\omega t + \varphi_i)$, $i = 2,3,4$) должны течь токи во втором, третьем и четвертом соленоиде чтобы в области между ними было вращающееся магнитное поле? С какой угловой скоростью оно будет вращаться? Соленоиды намотаны так, что при одинаковых фазах тока поле всех соленоидов направлено одновременно либо из центра, либо к центру системы соленоидов.



5. (2 балла) По круглому стержню длиной l и радиуса r распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением: $T(x)=T_1+T_2\left(x-l\right)^2$, где x - координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата $x=0$, второму - $x=l$ (см. рисунок). Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками $x=l/2$ и $x=3l/4$. Указание. Количество тепла q, переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx, одна поверхность которого имеет температуру t_1, вторая – температуру t_2, определяется законом: $q=\lambda\left(t_2-t_1\right)/\Delta x$, где λ - коэффициент теплопроводности (закон Фурье).



6. Для замены опасных деформаций изгиба деформациями растяжения-сжатия и облегчения веса большепролетных конструкций пролеты мостов часто делают из относительно легких металлических стержней, соединенных системой шарниров. Такая конструкция называется строительной фермой (от латинского firmus – прочный). Имеется мостовая ферма пешеходного моста, слева опирающаяся на неподвижный шарнир, справа – на шарнирно-подвижную опору. В узлах 3, 4, 8 к ферме приложены сосредоточенные силы $F_1=F_2=F_3=20$ кН. Найти силы натяжения стержней 6-9 и 7-10. Весом самой фермы пренебречь. Геометрические параметры фермы даны на рисунке, $l=1$ м.

Решения

1. Проще всего решить эту задачу, рассматривая сразу конечное состояние калориметров. С точки зрения содержимого они вернулись к первоначальному состоянию, но температура во втором калориметре уменьшилась от t_2 до t_x. Поэтому первый калориметр потерял такую энергию $Q=C\left(t_2-t_x\right)$ (где C - теплоемкость калориметра вместе с водой, но без тела). Поскольку по условию потерями тепла можно пренебречь, то всю эту энергию получил первый калориметр. Поэтому уравнение теплового баланса для двух перекладываний тела (во второй калориметр, а потом назад) дает

$$C\left(t_2-t_x\right)=\left(C+C_0\right)\left(t_y-t_1\right)$$

где C_0 - теплоемкость тела, t_y - искомая температура первого калориметра после возвращения в него тела. Отсюда

$$t_y=t_1+\frac{\left(t_2-t_x\right)}{1+\dfrac{C_0}{C}} \qquad (*)$$

А отношение теплоемкостей можно найти, рассматривая первый процесс установления равновесия. Для перекладывания тела из первого калориметра во второй получаем из уравнения теплового баланса

$$C\left(t_2 - t_x\right) = C_0\left(t_x - t_1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C_0}{C} = \frac{t_2 - t_x}{t_x - t_1}$$

Подставляя эту формулу в уравнение (*), получим

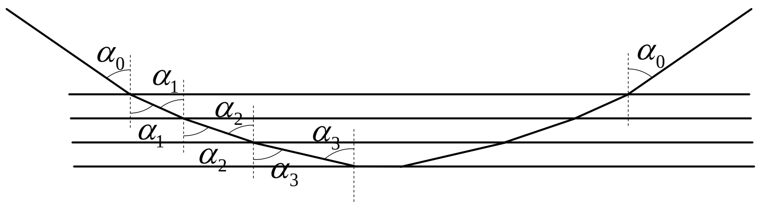
$$t_y = t_1 + \frac{\left(t_2 - t_x\right)\left(t_x - t_1\right)}{t_2 - t_1} = 39{,}9^\circ\,\mathrm{C}$$

Критерии оценивания:
1. Из уравнения теплового баланса для первого перекладывания тела найдено отношение теплоемкостей – 0,5 балла.
2. Правильно написано уравнение теплового баланса для второго перекладывания (или сразу для конечного состояния) – 0,5 балла
3. Полученная правильная окончательная формула - 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

2. Асфальт будет казаться мокрым, если падающие на него лучи будут отражаться как от гладкой поверхности (как от зеркала). А такое возможно, если лучи будут отражаться не от поверхности асфальта, а от горячего воздуха благодаря полному внутреннему отражению.

Действительно, под солнечными лучами асфальт разогревается до очень высоких температур (60° С, как сказано в условии). От асфальта нагревается воздух, в результате около поверхности асфальта формируется слой воздуха с сильно меняющейся температурой (и соответственно показателем преломления), причем, как это следует из данной в условии формулы, самый маленький показатель преломления – около поверхности асфальта. Найдем угол полного внутреннего отражения от слоя неравномерно нагретого воздуха.



Разобьем воздух на тонкие слои, показатель преломления каждого из которых можно считать постоянным. Пусть на верхний слой под углом α_0 падает луч. Тогда закон преломления на первой границе дает

$$n_0 \sin\alpha_0 = n_1 \sin\alpha_1$$

где $n_0 = n(T_{возд})$ - показатель преломления воздуха вдали от асфальта, n_1 и α_1 - показатель преломления и угол движения луча во втором слое. На вторую границу луч падает под углом α_1. Поэтому

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

И так далее (см. рисунок). Если в каком-нибудь слое произойдет полное внутреннее отражение, луч повернет назад и выйдет под тем же самым углом α_0. Таким образом, луч испытает полное внутреннее отражение, если будет выполнено условие

$$n(T_{возд})\sin\alpha_0 < n(T_{асф})$$

или

$$\sin\alpha_0 < \frac{n(T_{асф})}{n(T_{возд})} \qquad (*)$$

Человек увидит асфальт «мокрым» на таком расстоянии l от себя, луч от которого будет двигаться в направлении человека под углом α_0 или меньше. Поэтому асфальт будет казаться мокрым на расстоянии

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}} < \frac{n(T_{асф})}{n(T_{возд})}$$

где h - рост человека. Отсюда

$$l > \frac{h}{\sqrt{1-\left(\dfrac{n(T_{асф})}{n(T_{возд})}\right)^2}}$$

Используя далее данную в условии задачи формулу, значения $T_{возд} = 30°C = 303K$, $T_{асф} = 60°C = 333K$, $h = 2$ м, найдем

$$l > 300 \text{ м}$$

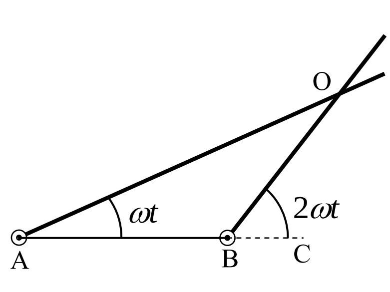
что согласуется с «бытовыми» наблюдениями и, в частности, с данной в условии задачи фотографией.

Критерии оценивания:

1. правильно понята и обоснована главная идея – асфальт будет казаться мокрым, если отражение луча происходит по закону полного внутреннего отражения – 0,5 балла.
2. Есть разбиение воздуха на тонкие слои, использован закон преломления для каждого слоя, показано, что нужен только первый и последний слой – 0,5 балла
3. Правильно найден синус угла падения, отвечающего полному внутреннему отражению в слое около асфальта - 0,5 балла
4. Правильно найдено расстояние до области, где асфальт будет казаться мокрым – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

3. Пусть после начала движения (когда стержни выли направлены направо) прошло некоторое время t, которое меньше времени половины оборота правого стержня $t < \pi/2\omega$. Рассмотрим треугольник АВО, где А и В – концы стержней, вокруг которых они вращаются, О – точка пересечения стержней



в этот момент. Очевидно, треугольник ABO равнобедренный, в котором AB=BO. Действительно, поскольку угол OBC равен $2\omega t$, то угол ABO в треугольнике ABO равен $\pi-2\omega t$. А поскольку угол OAB равен ωt, то угол AOB равен

$$\angle AOB=\pi-\angle OAB-\angle ABO=\pi-\omega t-\left(\pi-2\omega t\right)=\omega t$$

Таким образом, в треугольнике OAB равны углы $\angle AOB=\angle OAB$, и, следовательно, этот треугольник равнобедренный, в котором AB=BO в любой момент времени. Поэтому расстояние от точки B до точки пересечения стержней остается одинаковым в процессе движения, и равным l. Следовательно, точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью 2ω по окружности с центром в точке B и радиусом l. Поэтому величина скорости этой точки не меняется в процессе движения и равна

$$v=2\omega l. \qquad (*)$$

А ее ускорение является центростремительным, и равным

$$a=4\omega^2 l. \qquad (**)$$

Рассмотренное решение становится неверным через время $t>\pi/2\omega$, поскольку стержни перестают пересекаться. Однако через время, за которое правый стержень совершит еще один оборот (через время $t>3\pi/2\omega$ после начала движения стержней), стержни снова начнут пересекаться, причем точка их пересечения будет находиться ниже отрезка AB. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что траекторией точки пересечения стержней будет нижняя половинка окружности, а ее скорость и ускорение будут такими же. Затем (через время $t>2\pi/\omega$ после начала движения стержней), оба стержня станут направлены вправо, а далее движение точки их пересечения повторится.

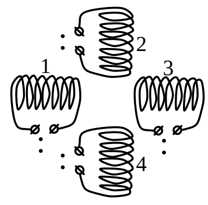
Таким образом, в течение половины времени, за которое правый стержень совершит два полных оборота (а левый – один), стержни будут пересекаться, в течение второй половины времени – нет. При этом точка их пересечения будет двигаться так: сначала по верхней половинке окружности с центром в точке B и радиусом l; потом стержни не будут пересекаться; потом - по нижней половинке окружности с центром в точке B и радиусом l. Когда стержни пересекаются, скорость и ускорение точки их пересечения являются постоянными и определяются формулами (*) и (**). Когда стержни не пересекаются, вопрос о скорости и ускорении точки их пересечения является бессмысленным.

Критерии оценивания:

1. правильно понято, что точка пересечения стержней движется по окружности – 0,5 балла.
2. правильное обоснование этого факта. – 0,5 балла
3. правильно найдена скорость точки пересечения стержней - 0,5 балла
4. правильно найдено ускорение точки пересечения стержней – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

4. Вектор индукции результирующего магнитного поля буде векторной суммой векторов, созданных каждым соленоидом. Поскольку соленоид создает магнитное поле, направленное вдоль своей оси, то поле соленоидов 1 и 3 (см. рисунок) будет направлено горизонтально, а поле соленоидов 2-4 – вертикально.



Далее идем от результата. Если вектор результирующего поля вращается с постоянной угловой скоростью Ω, то его проекция на направление соленоидов 1 и 3 будет описываться соотношением

$$B_{1-3} = B\cos\Omega t,$$

на направление соленоидов 2-4

$$B_{2-4} = B\sin\Omega t.$$

где B - модуль индукции результирующего поля. Отсюда заключаем, что ток в соленоиде 3 должен быть сдвинут по фазе на угол π по сравнению с током в соленоиде 1 (тогда поле соленоидов 1 и 3 будет зависеть от времени как $B_{1-3} = 2B_0\cos\omega t$, B_0 - поле одного соленоида), ток в соленоиде 2 – на угол $\pi/2$, а ток в соленоиде 4 – на угол $3\pi/2$ по сравнению с током в соленоиде 1. Тогда вектор индукции магнитного поля в области между соленоидами будет вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью ω.

Критерии оценивания:

1. использована правильная основная идея – проекции вращающегося вектора магнитного поля на горизонтальное и вертикальное направления должны совпадать с полями, созданными соленоидами 1 и 3 и соленоидами 2 и 4 – 0,5 балла.
2. правильно понято, что поля соленоидов 1 и 3 должны быть одинаково направлены, и, следовательно, сдвиг фаз между токами должен быть равен π – 0,5 балла
3. правильно понято, что поля соленоидов 2 и 4 должны быть одинаково направлены, но сдвинуты по фазе на $\pi/2$ по сравнению с токами в соленоидах 1 и 3 – 0,5 балла
4. все фазовые сдвиги правильны – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

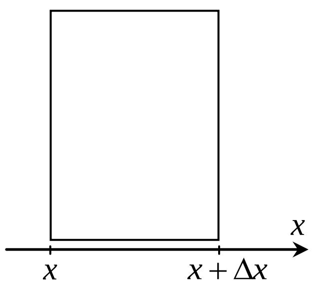
5. Очевидно, поток тепла по стержню распространяется в положительном направлении оси x. Действительно, температура левого конца стержня ($x = 0$) равна $T_1 + T_2$, правого ($x = l$) - T_1. Поскольку температура левого конца больше температуры правого, поток тепла идет слева направо.

Далее. Из закона Фурье легко найти поток тепла, проходящего через каждое сечение стержня. Действительно, количество теплоты, проходящее через сечение стержня в единицу времени, определяется соотношением

$$Q(x) = q(x)S = \lambda\frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x}S = \lambda S T'(x)$$

где S - площадь поперечного сечения стержня, $T'(x)$ производная температуры стержня, как функции координаты x рассматриваемого сечения.

Найдем теперь количество теплоты, уходящее через боковую поверхность стержня. Для этого рассмотрим узкий слой стержня толщиной Δx. Очевидно, Очевидно, поток тепла через боковую поверхность слоя равен разности потоков тепла, входящих через левое основание слоя, и выходящего через правое. Поэтому количество теплоты, проходящей через боковую поверхность рассматриваемого слоя, равно



$$\Delta W = Q(x+\Delta x) - Q(x) = \lambda S T'(x+\Delta x) - \lambda S T'(x) = \lambda S \Delta x \frac{T'(x+\Delta x) - T'(x)}{\Delta x} = \lambda S \Delta x T''(x)$$

где $T''(x)$ - вторая производная температуры по координате. Учитывая, что $S = \pi R^2$, а площадь боковой поверхности рассматриваемого элемента равна $\Delta S = 2\pi R \Delta x$, найдем количество теплоты, уходящее через единицу площади боковой поверхности стержня

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\lambda R T''(x)}{2}$$

Находя вторую производную температуры по координате, найдем, что поток через боковую поверхность не зависит от x и равен

$$w = \frac{\lambda R T_2}{l^2}.$$

Поэтому полный поток тепла через боковую поверхность между точками с координатами $x = l/2$ и $x = 3l/4$ равен произведению величины w на площадь боковой поверхности стержня между этими точками

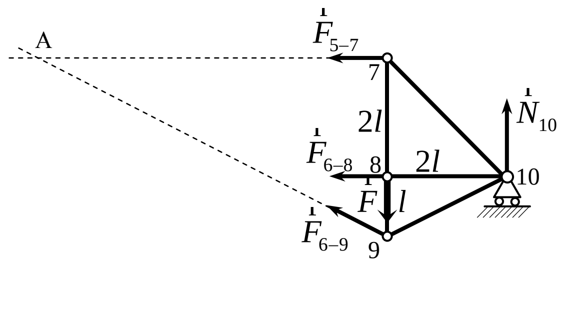
$$W = wS_1 = w 2\pi R l/4 = \frac{\pi R^2 \lambda T_2}{2l}.$$

Количество теплоты, уходящее в окружающую среду в единицу времени через боковые стенки между точками $x = l/2$ и $x = 3l/4$, можно было получить и другим способом как разность потоков тепла через сечения стержня при $x = l/2$ и $x = 3l/4$: $W = Q(x = 3l/4) - Q(x = l/2)$. Естественно, при этом способе решения получается тот же ответ, что и выше.

Критерии оценивания:

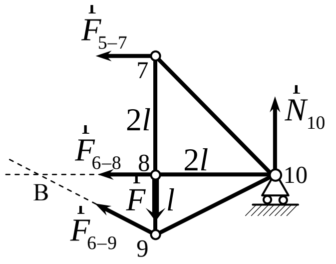
1. правильна основная идея расчета потока тепла через боковую поверхность – разность потоков, входящего и выходящего через основания – 0,5 балла.
2. по закону Фурье найден поток тепла через сечение стержня как функция координаты – 0,5 балла
3. понято, что поток тепла через боковую поверхность пропорционален второй производной температуры по координате - 0,5 балла
4. доказано, что поток тепла через боковую поверхность не зависит от координаты и получен правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла



6. Из-за симметрии задачи силы реакции в опорах 1 и 10 равны $N_{1,10} = 3F/2$ в каждой. Найдем силу натяжения стержня 6-9. Для этого мысленно «рассечем» ферму по стержням 5-7, 6-8 и 6-9. В этом сечении действуют силы натяжения $\vec{F}_{5-7}$, $\vec{F}_{6-8}$ и $\vec{F}_{6-9}$ (см. рисунок; если в результате вычислений какая-то из сил получится отрицательной, это будет означать другой направление по сравнению с тем, что показано на рисунке). Запишем теперь условие равновесия части фермы 7-8-9-10. Геометрически очевидно, что расстояние $A-7=6l$. Поэтому уравнение моментов относительно точки А дает

$$F_{6-8}2l+F6l-N_{10}8l=0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{6-8}=3F$$



Сила F_{6-8} оказалась положительной, что означает, что ее направление было на рисунке выбрано верно, а стержень 6-8 является растянутым. Аналогичное уравнение относительно точки В позволяет найти силу F_{5-7}

$$F_{5-7}2l-F2l+N_{10}4l=0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{5-7}=-2F$$

Сила F_{5-7} оказалась отрицательной, что значит, что она направлена по-другому по сравнению с рисунком. Стержень 5-7 сжат.

Теперь из условия равенства нулю проекции сил на горизонтальное направление получаем

$$F_{6-9}=-\frac{\sqrt{5}F}{2}$$

Таким образом, стержень 6-9 оказывается сжатыми, его сила натяжения равна

$$\left|F_{6-9}\right|=\frac{\sqrt{5}F}{2}=22,3 \text{ кН}$$

Очевидно, такой же является и сила натяжения симметричного стержня 4-6.

Силу натяжения стержня 1-2 можно найти из следующих соображений. Из условия равновесия шарнира 4 (уравнение сил для шарнира 4 в проекции на горизонтальное направление) находим, что сила натяжения стержня 1-4 – такая же, как и стержня 4-6 и стержень 1-4 оказывается сжатым:

$$\left|F_{1-4}\right|=\frac{\sqrt{5}F}{2}=22,3 \text{ кН}$$

Рассматривая теперь условие равновесия шарнира 1 (уравнение сил в проекциях на вертикальное направление), найдем, что стержень 1-2 сжат и его сила натяжения равна

$$\left|F_{1-2}\right|=2\sqrt{2}F=56,6 \text{ кН}$$

Критерии оценивания:

1. Найдены силы реакции опор – 0,5 балла.
2.Использована правильная идея, рассматривать условия равновесия частей фермы – 0,5 балла
3.Рассмотрено условие равновесия «правильной» части и использованы уравнения моментов для нахождения сил - 0,5 балла
4. правильные формулы и правильные вычисления – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

Критерии оценки работ

1. Каждая задача оценивается исходя из того максимального количества баллов, которое указано в варианте задания.
2. В зависимости от полноты решения решение каждой задачи оценивается оценкой от максимальной до нуля с шагом 0,5 балла.
3. Итоговая оценка работы получается суммированием оценок за задачи.