Математика. Отборочный этап

Математика

Категория участников: школьники 7-11 классов

Блок теоретических заданий отборочного этапа по **математике для школьников 7-11 классов** включает задачи разной сложности. Для повышения вероятности прохождения на заключительный этап желательно решить задачи не только по математике, но и по химии, биологии, физике, чтобы набрать больше баллов. Дополнительные баллы (50%) будут добавлены за прохождение **тестов ЗНТШ** по химии, физике, математике, биологии.

Перед отправкой заявки, пожалуйста, внимательно ознакомьтесь с инструкцией по загрузке работ.

Задания

1. Суперпамять

Британские исследователи работают над усовершенствованием нового способа размещения информации на дисках из кварцевого стекла. Метод основан на «прорезании» наноструктур в объеме диска при помощи лазера. При этом записывающий лазер способен создавать наноструктуры...

2. Графеновая радуга

Известно, что шестиугольники графенового листа можно полностью раскрасить в 7 цветов так, что любой произвольно выбранный на нем фрагмент в форме «ромашки» всегда будет раскрашен в разные цвета. Найдите все уникальные способы такой раскраски графена...

3. Наноструктурный анод литий-ионного аккумулятора

Компания Airbus работает над увеличением длительности автономного полета своих беспилотных электросамолетов Zephyr (которые работают на мощных солнечных батареях) с текущих 25-26 дней до трех месяцев, а в перспективе – до полугода...

4. Фаграфен

Каждому из вас хорошо знаком двумерный углерод – графен, за получение которого в 2010 году была вручена Нобелевская премия по химии. Он представляет собой сетку, состоящую из шестиугольников, напоминающую соты (рис. а). К настоящему времени при помощи математического моделирования...

5. Нанороллы

Группа китайских ученых создала алюмофосфатный материал, частицы которого назвала нанороллами (рис. 1). По представленной на рис. 1b микрофотографии наноролла оцените его внутренний и внешний диаметр, а также высоту...

6. Эффективность вакцины

Вакцинация от COVID-19 – важнейшее средство борьбы с пандемией, которое может защитить от заражения и неблагоприятных исходов болезни. Однако, как и в случае любых других вакцин, она не гарантирует 100% защиты...

7. Полые металлические кластеры как луковица

Рассмотрим такие ПМК, все грани которых являются правильными треугольниками (рис. 1б). Предположим, что два ПМК одинаковой формы, но с разным количеством атомов металла, приходящихся на его ребро ($\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$, где $\mathbf{n_1} < \mathbf{n_2}$) можно вложить друг в друга...

8. Геометрия нанокластера RuSn9

Рассмотрим такое взаимное расположение атомов олова Sn, при котором все грани многогранника Sn_9 (см. рис.) являются правильными треугольниками (многогранник **X**). Назовите самые маленькие правильногранные многогранники...

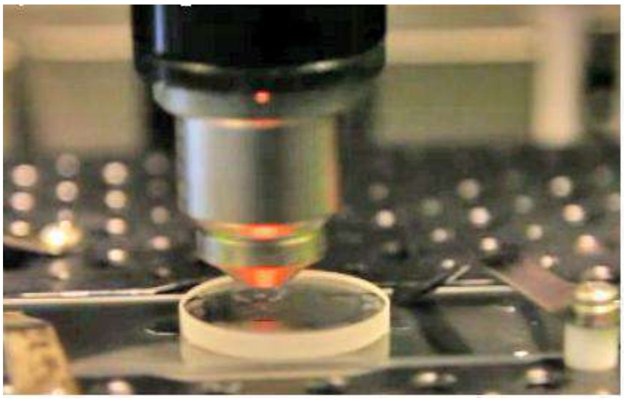
9. Четырехвалентные многогранники Гольдберга

Многогранники Гольдберга представляют собой высокосимметричные выпуклые многогранники, составленные из треугольников и квадратов, сходящихся в каждой вершине по четыре. Рассмотрим соответствующие этим многогранникам каркасные структуры (**Г**)...

10. Необычные углеродные структуры

Графен ‒ двумерный материал, образованный атомами углерода, соединенными в сетку из правильных шестиугольников. Задавая взаимное расположение отдельных шестиугольников на этой сетке (рис. 1), мы можем создавать развертки самых разнообразных каркасных углеродных структур...

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 1. Суперпамять

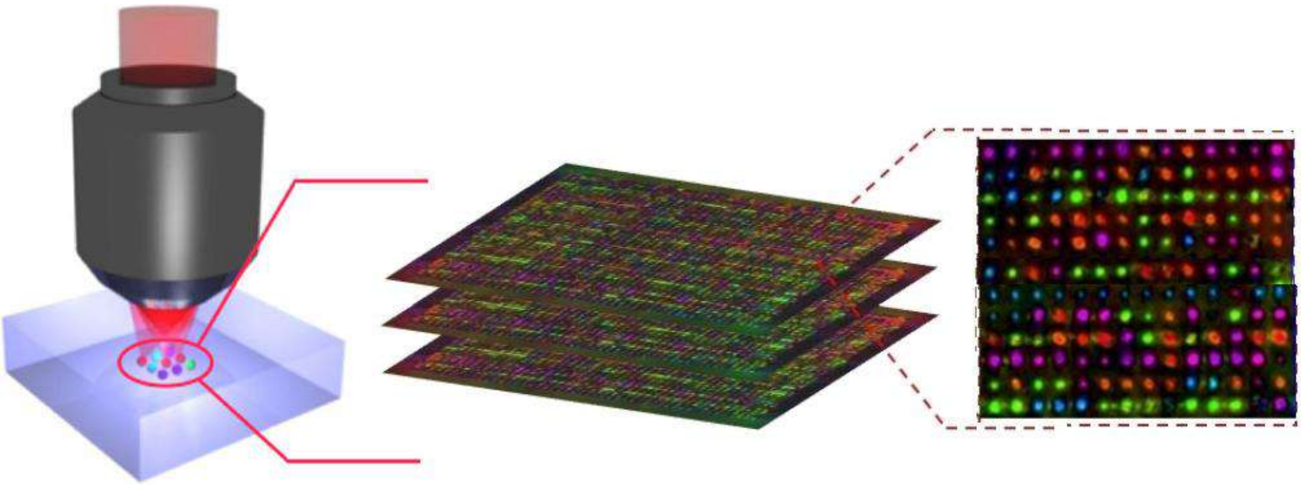


а) Процесс записи информации на диск из кварцевого стекла при помощи лазера.

б) Внешний вид диска с записью оригинальной трилогии Айзека Азимова «Основание». Один из таких дисков был отправлен в 2018 году в космос на ракете Falcon Heavy.

Рис. 1. Большая устойчивость кварца позволяет наноструктурам внутри него сохранять информацию практически вечно.

Британские исследователи работают над усовершенствованием нового способа размещения информации на дисках из кварцевого стекла (рис. 1). Метод основан на «прорезании» наноструктур в объеме диска при помощи лазера (рис. 2, 3). При этом записывающий лазер способен создавать наноструктуры из заранее определенного набора форм (с помощью них кодируется информация), которые потом «идентифицируются» считывающим лазером.



а) б) в)

Рис. 2. (а) Лазерные импульсы создают внутри стекла (б) плоские слои из кодирующих информацию упорядоченных массивов наноструктур, (в) каждую из которых можно условно визуализировать в виде окрашенного пятна, цвет которого отвечает углу ориентации наноструктуры (рис. 3б), а яркость – ее размеру.

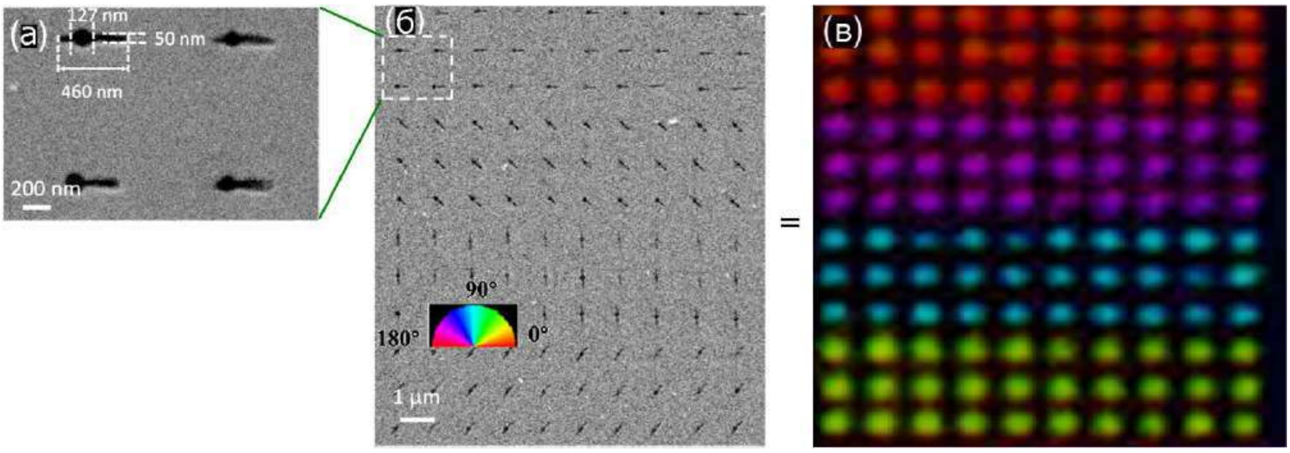


Рис. 3. а) Микрофотография четырех наноструктур в слое, полученная при помощи сканирующей электронной микроскопии (СЭМ).
б) СЭМ-изображение фрагмента слоя наноструктур, на котором для примера продемонстрированы элементы четырех различных ориентаций.
в) Визуализация наноструктур (рис. 3б) условными цветами на основании угла наклона (последовательно сверху вниз):
0° – красный, 135° – фиолетовый, 90° – голубой, 45° – зеленый.

1. Сколько наноструктур расположено в 1 мм^3 кварцевого стекла, если расстояние между соседними кодирующими информацию элементами в слое составляет 1,2 мкм, а толщина одного слоя – 10 мкм. **(2 балла)**

2. Сколько бит информации можно закодировать одной наноструктурой, если технология позволяет записывать и идентифицировать при чтении элементы в восьми возможных ориентациях и двух возможных размеров? **(2,5 балла)**

3. Сколько информации поместится на кварцевый диск диаметром 12 см и толщиной 4 мм при размещении наноструктур с той же плотностью, что и в п. 1? **(2 балла)**

4. Сколько информации можно будет записать на кварцевый диск из п. 3, если расстояние между наноструктурами уменьшить до 200 нм, толщину слоя – до 3 мкм, а один элемент будет кодировать 8 бит? **(1,5 балла)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 2. Графеновая радуга

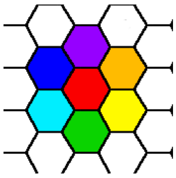


Рис. 1. Пример раскраски фрагмента графенового листа в форме «ромашки».

Известно, что шестиугольники графенового листа (рис. 3) можно полностью раскрасить в 7 цветов так, что любой произвольно выбранный на нем фрагмент в форме «ромашки» (рис. 1) всегда будет раскрашен в разные цвета.

1. Найдите все уникальные способы такой раскраски[1] графена, которые можно получить, стартуя с изображенной на рис. 1 «ромашки». Ответ обоснуйте. **(2,5 балла)**

2. Являются ли найденные раскраски периодическими[2]? Если да, выделите для них минимальную область, ограниченную центрами шестиугольников с одинаковыми цветами, повторяя которую можно задать раскраску целиком, и определите пары чисел[3] (**n**, **m**), отвечающие взаимному расположению этих шестиугольников. **(2,5 балла)**

3. Рассчитайте общее число уникальных способов, которыми можно раскрасить лист графена в 7 цветов радуги так, чтобы любой произвольно выбранный на нем фрагмент в форме «ромашки» был окрашен в 7 разных цветов. **(4 балла)**

[1]Уникальный способ раскраски – такое взаимное расположение шестиугольников семи цветов, которое невозможно получить из других раскрасок ни при каких поворотах в плоскости графенового листа и/или при параллельных переносах.

[2]Периодичной называется структура, которая совмещается сама с собой при параллельном переносе в одном или нескольких направлениях.

[3]Любую пару шестиугольников (рис. 2) на графеновом листе (рис. 3) можно описать парой натуральных чисел (**n**, **m**), являющихся координатами центра одного из них относительно центра другого в косоугольной системе координат:

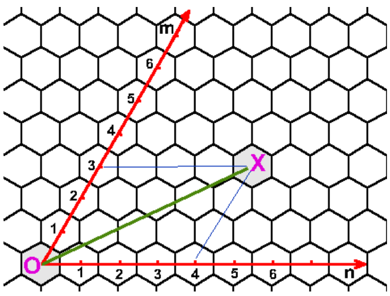


Рис. 2. Пример для пары шестиугольников, характеризуемых парой чисел (4,3).

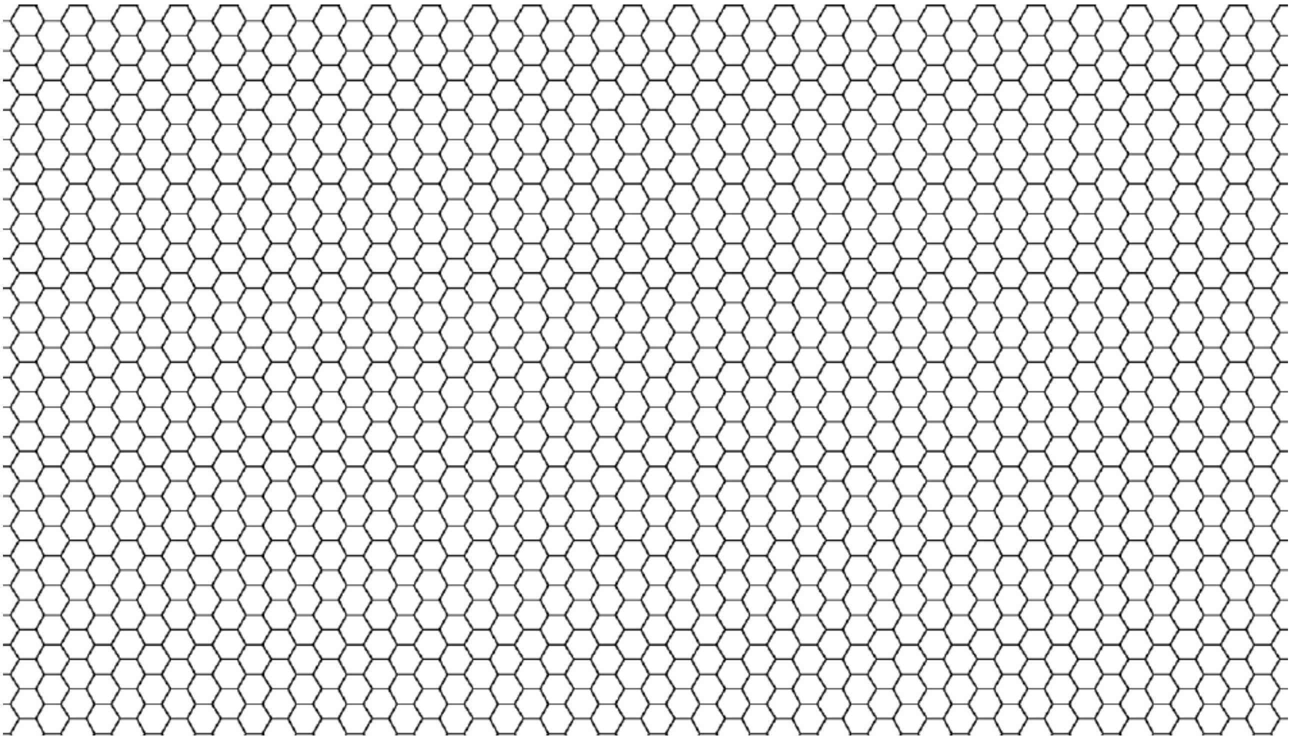
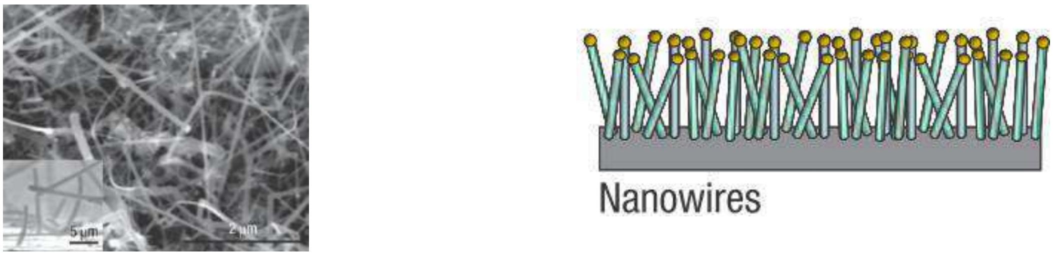


Рис. 3. Сетка шестиугольников как модель листа графена.

Всего – 9 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 3. Наноструктурный анод литий-ионного аккумулятора

Компания Airbus работает над увеличением длительности автономного полета своих беспилотных электросамолетов Zephyr (которые работают на мощных солнечных батареях) с текущих 25-26 дней до трех месяцев, а в перспективе – до полугода. Одно из технических решений, которое поможет достичь такого результата – это замена анода в обычных литий-ионных аккумуляторах, обеспечивающих полет самолета в ночное время, на наноструктурированный анод, представляющий собой «щеточку» из кремниевых нанопроволок (Рис. 1).

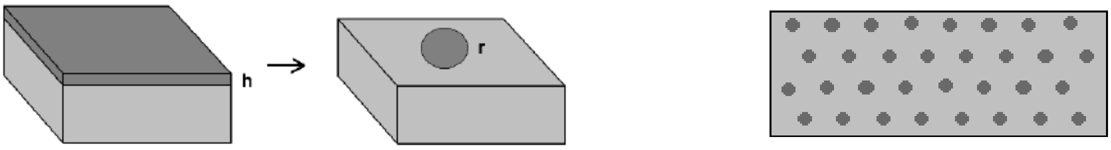


а) Микрофотография, полученная при помощи сканирующего электронного микроскопа.

б) Схематичное изображение «щеточки»; каждую из нанопроволок венчает золотой нанокластер.

Рис. 1. Анод из кремниевых нанопроволок.

Синтез материала, имеющего такую структуру, проводят в два этапа. На первом этапе на подложку напыляют тонкую пленку золота, которая при нагревании распадается на отдельные капли (рис. 2). На втором этапе, используя золотые капли как затравку, выращивают непосредственно нанопроволоки кремния.



а) Напыленная на подложку тонкая нанопленка золота при нагревании плавится и распадается на капли.

б) Взаимное расположение капель золота на подложке.

Рис. 2. Первый этап изготовления наноструктурированного анода.

1. Рассчитайте расстояние между центрами капель золота радиусом **r** = 45 нм, если толщина исходной пленки составляла 15 нм. **(3 балла)**

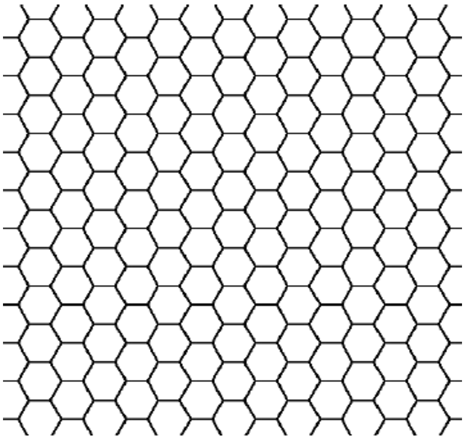
2. Рассчитайте длину кремниевых нанопроволок, если на втором этапе синтеза масса подложки размером 2 на 2 миллиметра увеличивается на 75 микрограммов. **(3 балла)**

Считать, что:

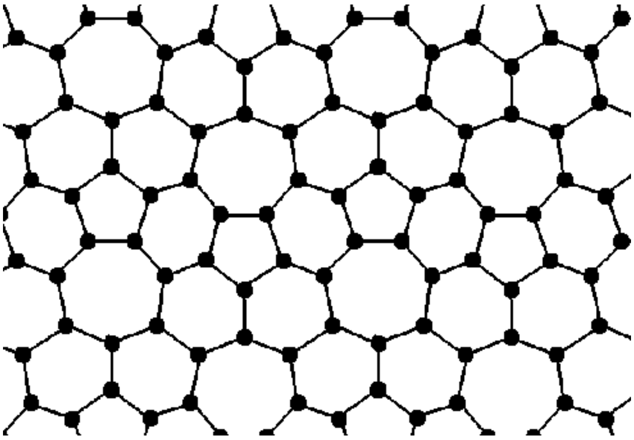
- все капли золота имеют одинаковый размер и имеют форму сферы,
- взаимное расположение капель золота соответствует рис. 2б,
- диаметр кремниевой нанопроволоки равен диаметру золотой капли,
- кремниевые нанопроволоки имеют форму цилиндров одинаковой длины,
- плотность кремния 2,3 г/см^3.

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 4. Фаграфен



а)



б)

Каждому из вас хорошо знаком двумерный углерод – графен, за получение которого в 2010 году была вручена Нобелевская премия по химии. Он представляет собой сетку, состоящую из шестиугольников, напоминающую соты (рис. а). К настоящему времени при помощи математического моделирования предсказано достаточно много аллотропных форм двумерного углерода, в том числе предложенный в 2015 году фаграфен (см. рис. б).

1. Рассмотрите структуру фаграфена. Из каких разных многоугольников она состоит? Найдите, посчитайте и опишите неэквивалентные (то есть, имеющие разное окружение):

   а. многоугольники каждого типа; **(1 балл)**

   б. узлы (атомы углерода); **(3 балла)**

   в. ребра. **(3 балла)**

2. Выделите минимально возможную прямоугольную область – ячейку, – повторение которой позволяет полностью воспроизвести фаграфен. **(1 балл)** Найдите число узлов и число многоугольников каждого типа, приходящееся на ячейку. **(2 балла)**

3. Является плоским фаграфен, в котором все многоугольники являются правильными? **(1 балл)**

Всего – 11 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 5. Нанороллы

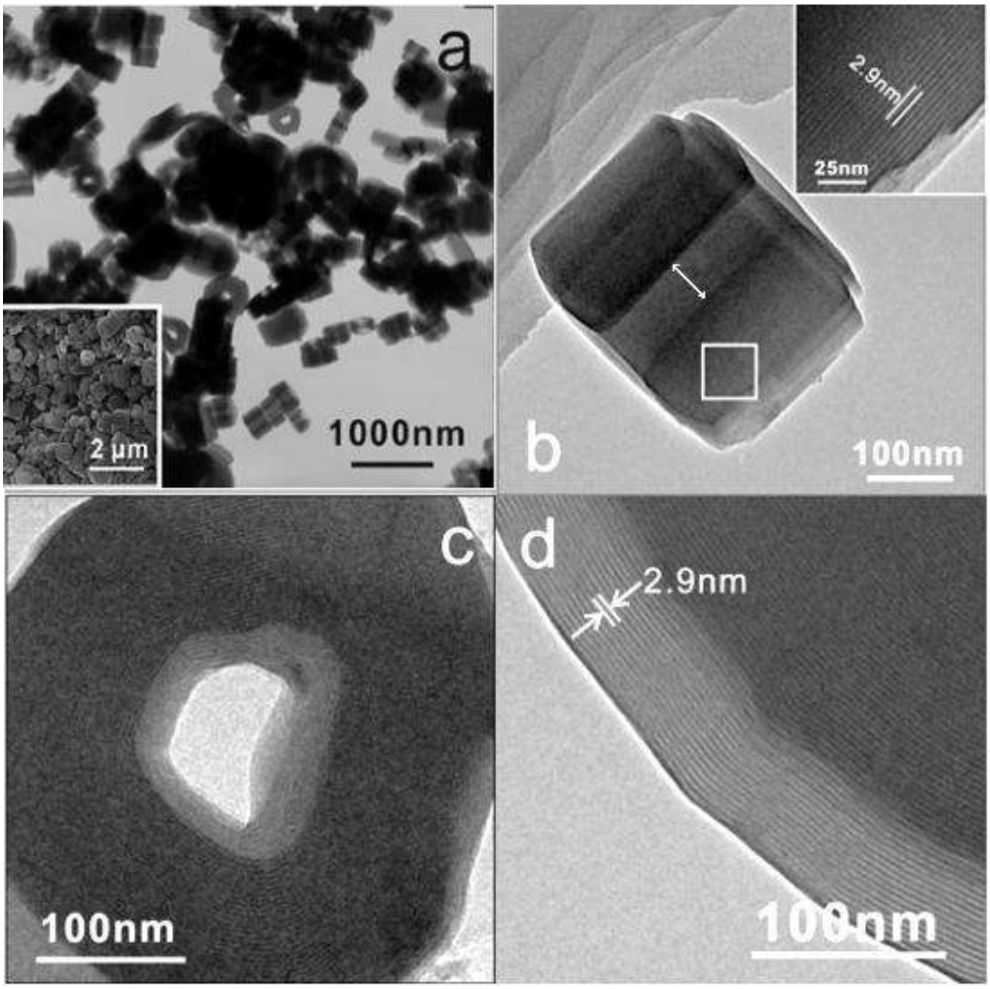


Рис. 1. Микрофотографии (a – d) нанороллов, полученные методом просвечивающей электронной микроскопии.
Слои алюмофосфата в нанороллe повторяются с периодом, равным 2,9 нм (b, d).
Внутренний диаметр наноролла отмечен на рисунке (b) обоюдоострой стрелкой.

Группа китайских ученых создала алюмофосфатный материал, частицы которого назвала нанороллами (рис. 1). По представленной на рис. 1b микрофотографии наноролла:

а. оцените его внутренний и внешний диаметр, а также высоту; **(1,5 балла)**

б. рассчитайте число витков в наноролле и длину ленты алюмофосфата, которая получится, если наноролл полностью развернуть. **(4,5 балла)**

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 6. Эффективность вакцины

Вакцинация от COVID-19 – важнейшее средство борьбы с пандемией, которое может защитить от заражения и неблагоприятных исходов болезни. Однако, как и в случае любых других вакцин, она не гарантирует 100% защиты.

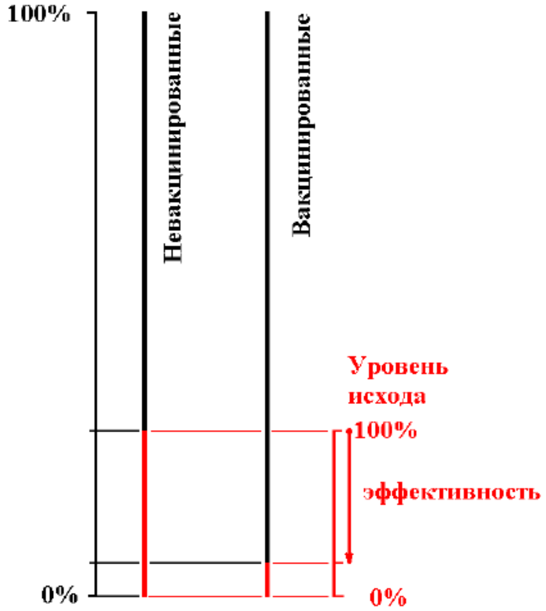


Рис. 1. Эффективностью вакцины **α** *против некоторого исхода (такого, как заражение, госпитализация, тяжелое течение или смерть) называется снижение уровня данного исхода среди вакцинированной группы по сравнению с невакцинированной, выраженное в процентах.*

1. Эффективность некоторой вакцины против заражения COVID-19, тяжелого течения этой болезни и смерти от нее составляет $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{З}$ = 80%, $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{TT}$ = 85% и $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{C}$ = 95%, соответственно. Во сколько раз данная вакцина снижает риск

   а. заражения,

   б. тяжелого течения,

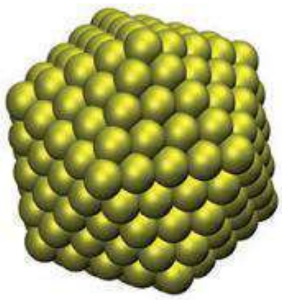
   в. смерти

   для людей, получивших ее, по сравнению с невакцинированными? **(2 балла)**

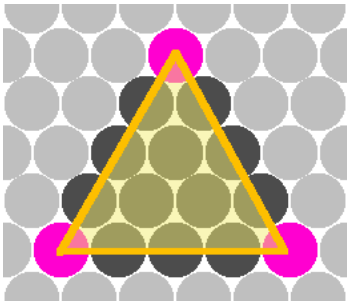
2. В некотором регионе доля вакцинированного населения составляет $\boldsymbol{\omega}$ = 60%, при этом, доля вакцинированных среди всех госпитализированных с COVID-19 людей в этом регионе равна $\boldsymbol{\delta}$ = 20%. Найдите эффективность такой вакцины против госпитализации, $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{Г}$. **(3 балла)**

Всего – 5 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 7. Полые металлические кластеры как луковица



а) Пример ПМК в форме икосаэдра.



б) Схематичное изображение грани ПМК как фрагмента листа плотноупакованных атомов металла. На ребро этой грани приходится 5 атомов металла.

Рис. 1. Полый металлический кластер (ПМК) представляет собой металлическую оболочку толщиной в один атом, имеющую форму многогранника.

Рассмотрим такие ПМК, все грани которых являются правильными треугольниками (рис. 1б). Предположим, что два ПМК одинаковой формы, но с разным количеством атомов металла, приходящихся на его ребро ($\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$, где $\mathbf{n_1} < \mathbf{n_2}$) можно вложить друг в друга[1].

1. Выведите формулу зависимости расстояния[1] **d** между треугольными гранями двух вложенных друг в друга ПМК от $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и диаметра атома металла **D** для:

   а. тетраэдра,

   б. треугольной бипирамиды,

   в. октаэдра,

   г. пятиугольной бипирамиды[2],

   д. икосаэдра[2].

   (5 баллов)

Будем называть плотноупакованной луковицей такую последовательность вложенных друг в друга ПМК, для которой все атомы металла любой нижележащей оболочки будут касаться атомов метала вышележащей оболочки.

2. Выразите расстояние $\mathbf{d_0}$ между соседними слоями[1] в плотноупакованной луковице через диаметр атома металла **D**. **(2 балла)**

3. Сопоставив **d** и $\mathbf{d_0}$, определите, могут ли ПМК в форме

   а. тетраэдра,

   б. треугольной бипирамиды,

   в. октаэдра,

г. пятиугольной бипирамиды,

д. икосаэдра

образовывать плотноупакованную луковицу? Если да, чему в этом случае для нее равен шаг длины ребра **Δ** = $\mathbf{n_2}$ – $\mathbf{n_1}$ между двумя соседними слоями? **(5 баллов)**

[1]При вложении друг в друга центры ПМК совмещаются. Расстоянием между слоями во вложенных ПМК считать расстояние между двумя плоскостями, проходящими через центры атомов, формирующих треугольные грани ПМК, отвечающие каждому из слоев.

[2]Необходимые стереометрические формулы для этих двух многогранников можно взять из справочных источников.

Всего – 12 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 8. Геометрия нанокластера $RuSn_9$

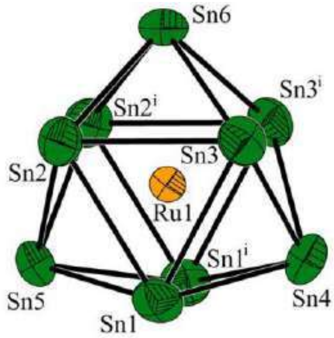


Рис. Схематичное изображение структуры нанокластера $RuSn_9$.
Центры атомов Sn образуют многогранник Sn_9.

Рассмотрим такое взаимное р асположение атомов олова Sn, при котором все грани многогранника Sn_9 (см. рис.) являются правильными треугольниками (многогранник **X**).

1. Назовите самые маленькие правильногранные многогранники, на которые может быть разбит **X**. **(1 балл)**

2. Внутрь образованного атомами Sn многогранника **X** поместим атом Ru так, чтобы все грани **X** оставались правильными треугольниками и получившийся при этом нанокластер имел минимальный размер. В предположении атомов-жестких шаров рассчитайте:

   а. расстояние между центрами ближайших атомов Sn; **(4 балла)**

   б. размер[1] такого нанокластера $RuSn_9$. **(2 балла)**

   в. Какие атомы при этом будут касаться друг друга? Приведите их обозначения согласно рисунку. **(1 балл)**

Многогранник Sn_9, отвечающий реальному нанокластеру $RuSn_9$ (многогранник **Y**), является вытянутым вдоль поворотной оси третьего порядка многогранником **X**. При этом атом Ru касается максимально возможного числа атомов Sn, а также максимально возможное число атомов Sn касается друг друга.

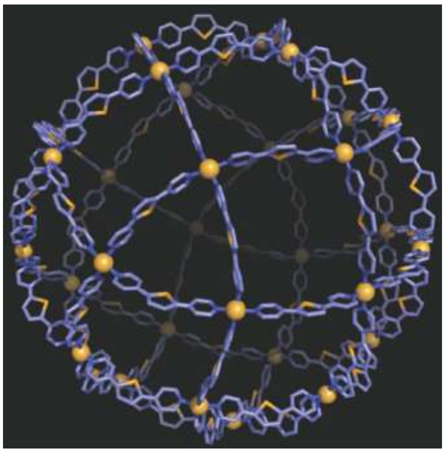
3. Рассчитайте длину всех ребер **(3 балла)** многогранника **Y**. Рассчитайте размер[1] рассматриваемого нанокластера $RuSn_9$. **(2,5 балла)** Какие атомы при этом будут касаться друг друга, а какие − нет? **(1,5 балла)** Ответ подтвердите расчетом.

Считать **r**(Sn) = 0,157 нм и **r**(Ru) = 0,113 нм.

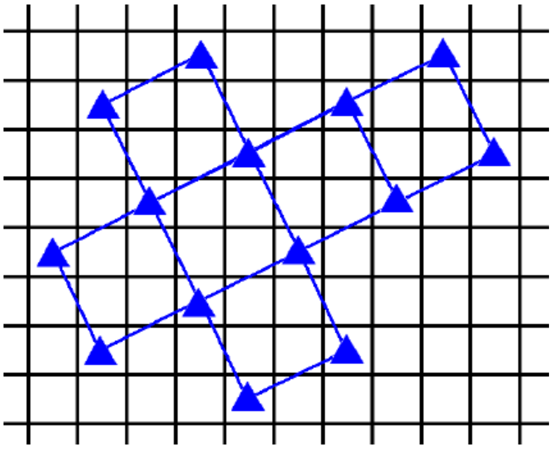
[1]Как минимальный диаметр сферы, внутри которой находятся все атомы нанокластера.

Всего – 15 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 9. Четырехвалентные многогранники Гольдберга



*а) Схематичное изображение каркаса **А**: два типа элементов – атомы металла (желтые шарики) и органические «мостики» (фиолетовые «цепочки»).*



*б) Развертка многогранника, отвечающего каркасу **А**. Треугольным значком отмечены ячейки, при «склеивании» ребер развертки формирующие треугольные грани.*

*Рис. 1. Пример молекулярной каркасной структуры **Г** – каркас **А**.*

Многогранники Гольдберга представляют собой высокосимметричные выпуклые многогранники, составленные из треугольников и квадратов, сходящихся в каждой вершине по четыре. Рассмотрим соответствующие этим многогранникам каркасные структуры (**Г**), в которых вершинам многогранников соответствуют атомы металла, а ребрам – органические «мостики», как показано на примере каркаса **А** (рис. 1а).

Развертку любого четырехвалентного многогранника Гольдберга можно построить на сетке из квадратов, как показано на рисунке 1б.

1. В вершинах какого многогранника лежат треугольные грани **Г**? **(0,5 балла)**

2. Развертку любого каркаса **Г** можно однозначно задать на сетке из квадратов при помощи двух целочисленных параметров – (**a**, **b**). По рисунку 1б найдите их значения для каркаса **А**. **(1 балл)**

3. Выведите в общем виде зависимость числа атомов металла **M** в каркасе **Г** от (**a**, **b**). **(2 балла)** Рассчитайте **M** для каркаса **А**. **(1 балл)**

4. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, выведите, как число треугольных $\mathbf{F_3}$ и квадратных $\mathbf{F_4}$ граней в каркасе **Г** зависит от (**a**, **b**). **(3 балла)** Рассчитайте $\mathbf{F_3}$ и $\mathbf{F_4}$ для каркаса **А**. **(1 балл)**

5. Основываясь на полученных ранее формулах, определите, могут ли существовать каркасы **Г** и соответствующие им четырехвалентные многогранники Гольдберга, содержащие:

   а. **M** = 2022 атома металла?

   б. **L** = 2022 органических молекулы?

в. $\mathbf{F_3}$ = 2022 треугольных грани?

г. $\mathbf{F_4}$ = 2022 квадратных грани?

д. **F** = 2022 грани суммарно?

Если да, найдите все возможные пары (**a**, **b**) для таких каркасов. **(6,5 баллов)**

При решении считать, что **a** > **b**.

Всего – 15 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Задача 10. Необычные углеродные структуры

Графен – двумерный материал, образованный атомами углерода, соединенными в сетку из правильных шестиугольников. Задавая взаимное расположение отдельных шестиугольников на этой сетке (рис. 1), мы можем создавать развертки самых разнообразных каркасных углеродных структур, таких как, например, фуллерены или нанотрубки.

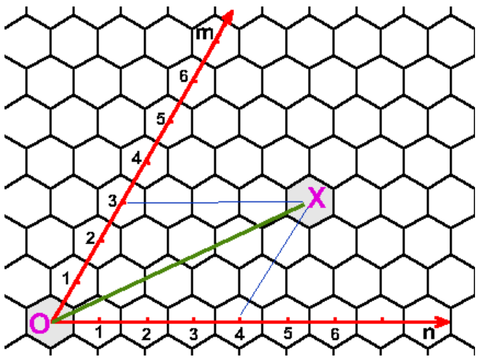


*Рис. 1. Любую пару шестиугольников (точка **O** и точка **X**) на графеновом листе можно описать двумя натуральными числами (**n**, **m**), которые являются координатами центра одного из них относительно центра другого в косоугольной системе координат. Пример для (4, 3).*

Рассмотрим четыре типа углеродных структур, отличающиеся друг от друга формой развертки (рис. 2). Каждый из типов определяется своим набором независимых параметров [($\mathbf{n_i}$, $\mathbf{m_i}$)].

1. Для каждой из структур, развертки которых представлены на рисунке 2:

   а. установите, какие многоугольники образуются в местах склейки, отмеченных розовым и желтым цветом; **(1 балл)**

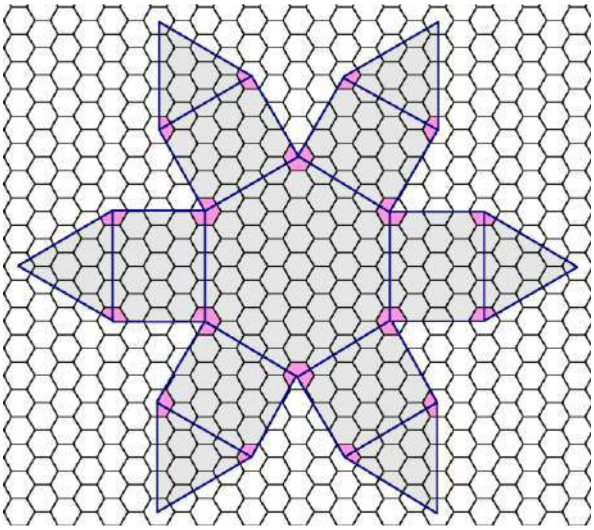
   б. в вершинах каких многогранников лежат эти многоугольники? **(1 балл)**

   в. какие из отрезков однозначно задают развертку структуры? Отметьте эти отрезки на рисунке либо дайте их описание в терминах многогранника (п. 1*б*); **(2 балла)**

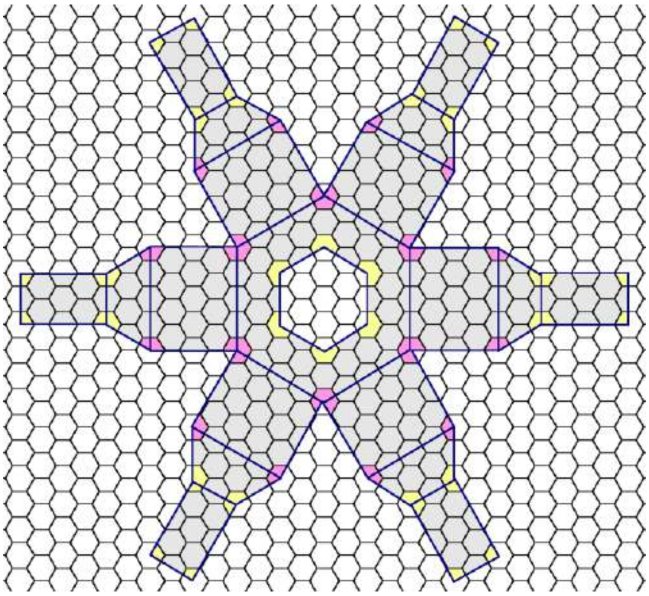
   г. найдите значение параметров ($\mathbf{n_i}$, $\mathbf{m_i}$), задающих отрезки из п. 1*в*. **(2 балла)**

2. Для каждого из четырех типов углеродных структур выведите зависимость общего числа атомов **N** в ней от параметров [($\mathbf{n_i}$, $\mathbf{m_i}$)]. **(2 балла)** Рассчитайте **N** для каждой из представленных на рис. 2. углеродных структур. **(1 балл)**

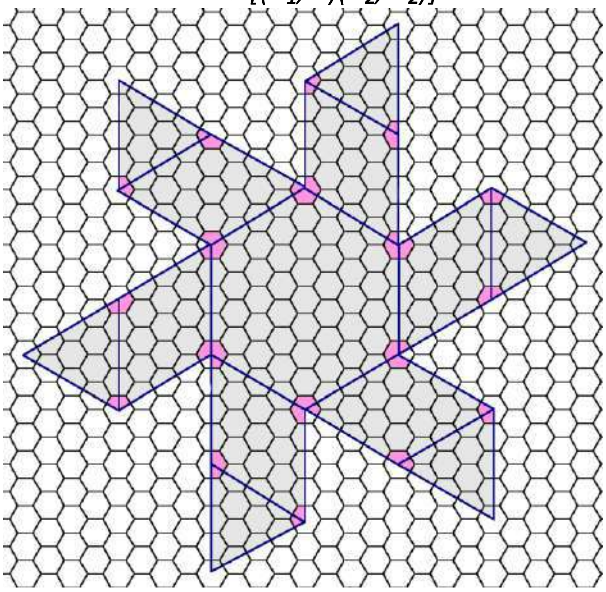
3. Оцените размер углеродной структуры Типа 2б, развертка которой представлена на рис. 2, как диаметр сферы, описанной вокруг многогранника (п. 1*б*). Атомы углерода считать точечными, расстояние между ними равным **a** = 0,14 нм. **(4 балла)**



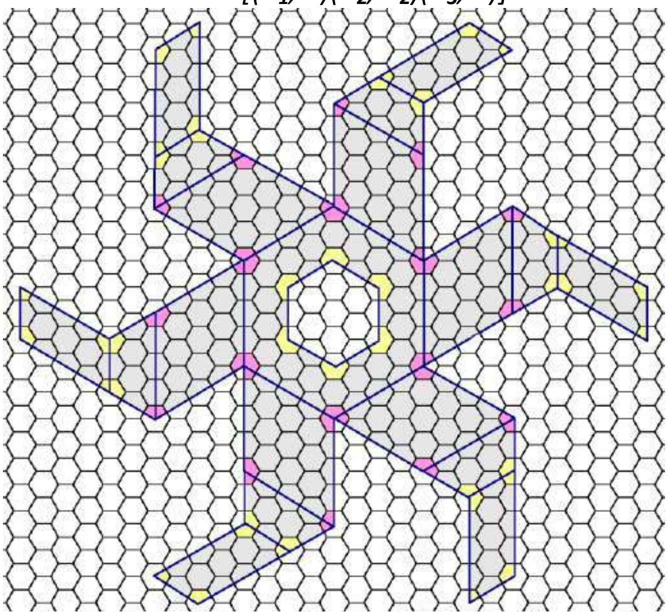
Тип 1а $[(\mathbf{n_1}, 0)(\mathbf{n_2}, \mathbf{n_2})]$



Тип 1б $[(\mathbf{n_1}, 0)(\mathbf{n_2}, \mathbf{n_2})(\mathbf{n_3}, 0)]$



Тип 2а $[(\mathbf{n_1}, 0)(\mathbf{n_2}, 0)]$



Тип 2б $[(\mathbf{n_1}, 0)(\mathbf{n_2}, 0)(\mathbf{n_3}, 0)]$

Рис. 2. Примеры разверток углеродных структур четырех типов и отвечающие им $[(\mathbf{n_i}, \mathbf{m_i})]$.

Всего – 13 баллов