



Тест ЗНТШ. Математика (отборочный этап)
Решение

1. Ответ: 1001

По теореме Эйлера для выпуклых многогранников, состоящих из пяти- и шестиугольников, сходящихся в вершинах по 3 (см. лекцию ЗНТШ по математике):

$$V - E + F = 2,$$

где

$$\text{число вершин } V = 5/3F_5 + 6/3F_6,$$

$$\text{число ребер } E = 5/2F_5 + 6/2F_6,$$

$$\text{число граней } F = F_5 + F_6.$$

Объединяя, получаем

$$5/3F_5 + 6/3F_6 - 5/2F_5 - 6/2F_6 + F_5 + F_6 = 2$$

$$F_5 = 12$$

Тогда

$$V = 20 + 2F_6$$

$$F_6 = 0,5V - 10 = 0,5 \cdot 2022 - 10 = 1001$$

2. Ответ: увеличится в 200 тысяч раз

Запишем выражение для вычисления удельной площади поверхности для частицы в форме куба со стороной a , изготовленного из материала с плотностью ρ :

$$S_{уд} = \frac{S}{m} = \frac{S}{V\rho} = \frac{6a^2}{a^3\rho} = \frac{6}{a\rho}.$$

При изменении длины ребра куба от $a_1 = 1$ см до $a_2 = 50$ нм удельная площадь поверхности увеличивается в

$$\frac{S_{уд2}}{S_{уд1}} = \frac{6a_1\rho}{6a_2\rho} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{10^{-2}}{50 \cdot 10^{-9}} = 200000.$$

3. Ответ: 10

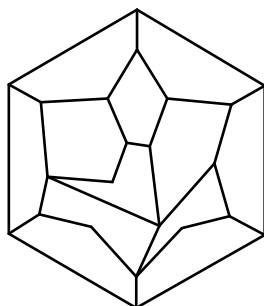
Нам необходимо найти, сколькими способами можно разместить 2 остатка аминокислоты В в пептиде длиной $3 + 2 = 5$:

$$C_{3+2}^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

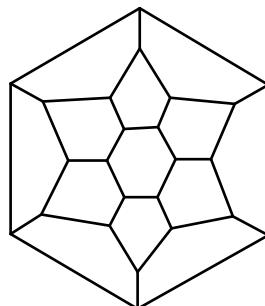
4. **Ответ: 5**

Фуллерен – каркасная углеродная молекула, представляющая собой выпуклый многогранник, состоящий из правильных пяти- и шестиугольников, сходящихся в каждой вершине по три.

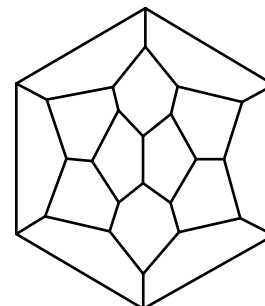
Многогранник, представленный на проекции А, не является фуллереном, так как имеются вершины, в которых сходятся по 2 или 4 ребра (многоугольника). Многогранники, представленные на остальных пяти проекциях, отвечают определению фуллерена.



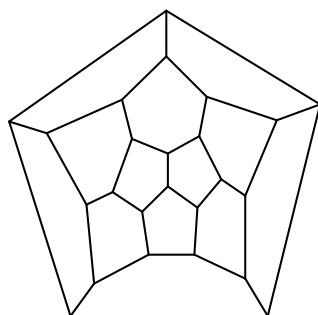
А



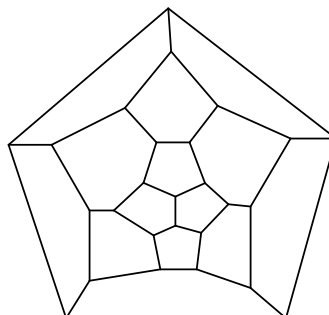
Б



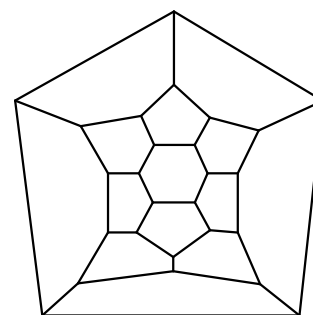
В



Г



Д



Е

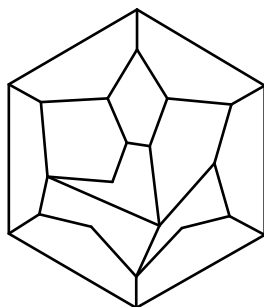
5. **Ответ: 2**

Рассчитаем число вершин в каждом из многогранников, представленных на проекциях:

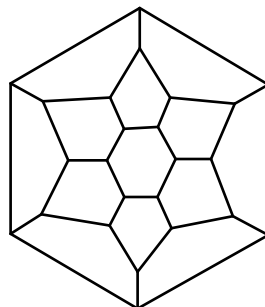
- А – фуллереном не является (см. вопрос 4),
- Б – 24,
- В – 26,
- Г – 24,
- Д – 26,
- Е – 26.

Поскольку углеродные молекулы состава C_{24} и C_{26} имеют по одной отвечающей им фуллереновой структуре (см. лекцию ЗНТШ по математике), то на рисунках Б – Е представлены только два фуллерена, просто спроецированные на разные грани.

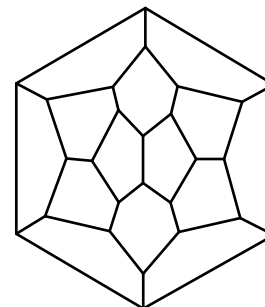
Это же можно увидеть, закрасив на представленных проекциях только пятиугольные грани и изучив взаимное расположение пяти- и шестиугольников или построив модели соответствующих многогранников из подручных материалов.



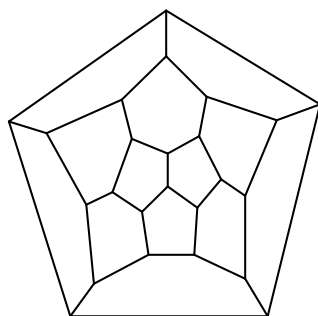
А



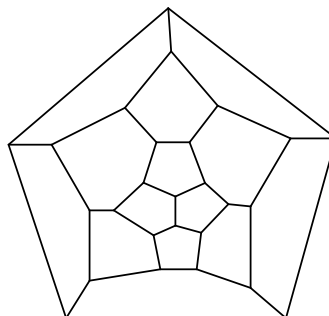
Б



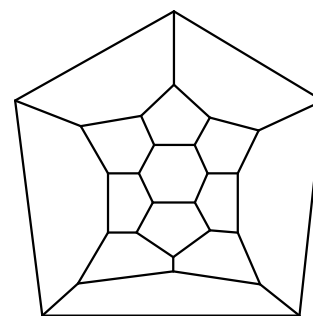
В



Г



Д



Е

6. Ответ: 240

Развертка икосаэдра состоит из 20 одинаковых равносторонних треугольных граней, на каждый треугольник при этом приходится

6 (в плоскости треугольника) + 12 (на ребре треугольника) · 0,5 = 12 атомов углерода.

Всего в фуллерене тогда 20 · 12 = 240 атомов.

7. Ответ: 3

Общее число шариков в модели треугольного кластера равно:

$$T(m) = \sum_1^m k = \frac{(m)^2 + m}{2} \text{ (см. лекцию ЗНТШ по математике).}$$

Если на его ребро приходится $2n$ шариков:

$$T(2n) = \frac{(2n)^2 + 2n}{2} = 2n^2 + n.$$

В свою очередь, общее число шариков в модели кластера в форме квадратной пирамиды составляет:

$$P(m) = \sum_1^m k^2 = \frac{2m^3+3m^2+m}{6} \text{ (см. лекцию ЗНТШ по математике).}$$

Если на ее ребро приходится n шариков:

$$P(n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

По условию,

$$2T(2n) = 3P(n).$$

Тогда

$$2(2n^2 + n) = 3 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$8n^2 + 4n = 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$2n^3 - 5n^2 - 3n = 0$$

Решая полученное квадратное уравнение, получаем два корня, $n = -0,5$ и $n = 3$. Поскольку число шариков, приходящихся на ребро модели, не может быть отрицательным, то решением является $n = 3$.

8. Ответ: 1 и 2

1 – верно, поскольку любой фуллерен является выпуклым многогранником.

2 – верно (см. ответ на вопрос 1, а также лекцию ЗНТШ по математике)

3 – неверно, теорема выполняется для любого выпуклого многогранника (см. лекцию ЗНТШ по математике).

9. Ответ: 24

Два бита двоичного кода кодируют одну из четырех нуклеотидных «букв» (см. лекцию ЗНТШ по математике). Первому коду (01) можно сопоставить одну из четырех возможных «букв», второму (10) – одну из оставшихся трех, третьему (11) – одну из двух, а четвертому (00) – последнюю, не выбранную ранее, «букву». То есть, всего возможно

$$4! = 24$$

варианта расшифровки приведенного в условии кода.

10. Ответ: $d_1 = d_2 = d_3$

Запишем формулы для расчета удельной площади поверхности для наночастиц каждой формы:

$$\text{шар } S_{\text{удшар}} = \frac{S_{\text{шар}}}{m} = \frac{S_{\text{шар}}}{V_{\text{шар}}\rho} = \frac{4\pi(d_1/2)^2}{(4/3)\pi(d_1/2)^3\rho} = \frac{6}{d_1\rho}$$

$$\text{куб } S_{\text{удкуб}} = \frac{S_{\text{куб}}}{m} = \frac{S_{\text{куб}}}{V_{\text{куб}}\rho} = \frac{6d_2^2}{d_2^3\rho} = \frac{6}{d_2\rho}$$

$$\text{цилиндр } S_{\text{удцил}} = \frac{S_{\text{цил}}}{m} = \frac{S_{\text{цил}}}{V_{\text{цил}}\rho} = \frac{2\pi(d_3/2)^2 + \pi d_3 d_3}{\pi(d_3/2)^2 d_3 \rho} = \frac{2d_3^2 + 4d_3^2}{d_3^3 \rho} = \frac{6}{d_3 \rho}$$

Выражая из этих формул линейные размеры, получаем:

$$S_{\text{удшар}} = S_{\text{удкуб}} = S_{\text{удцил}}$$

$$\frac{6}{d_1\rho} = \frac{6}{d_2\rho} = \frac{6}{d_3\rho}$$

$$d_1 = d_2 = d_3$$