Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 1. Суперпамять

1. По условию, все кодирующие информацию элементы находятся в узлах трехмерной «сетки», разбивающей объем диска на одинаковые параллелепипеды. На один такой параллелепипед объемом 1,2·1,2·10 мкм^3 приходится 8·1/8 = 1 наноструктура. Тогда в 1 мм^3 кварцевого стекла расположено

$$\mathbf{N_1} = 1\cdot10^{-9}/(1{,}2\cdot10^{-6}\cdot1{,}2\cdot10^{-6}\cdot10^{-5}) = 6{,}94\cdot10^{7} \text{ наноструктур.}$$

2. Поскольку для каждого элемента, кодирующего информацию, существует восемь вариантов ориентации и два варианта размера, то всего для него существует 8·2 = 16 = 2^4 возможных вариантов, что соответствует 4 битам информации.

3. Объем такого диска составляет

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{d}^2/4\cdot\mathbf{h} = 3{,}14\cdot(12\cdot10^{-2})^2/4\cdot4\cdot10^{-3} = 4{,}52\cdot10^{-5} \text{ м}^3$$

Число наноструктур в этом объеме равно

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}/1\cdot10^{-9}\cdot\mathbf{N_1} = 4{,}52\cdot10^{-5}/1\cdot10^{-9}\cdot 6{,}94\cdot10^{7} = 3{,}14\cdot10^{12}$$

Поскольку каждая наноструктура кодирует 4 бит информации, то общее количество записанной на такой диск информации составляет

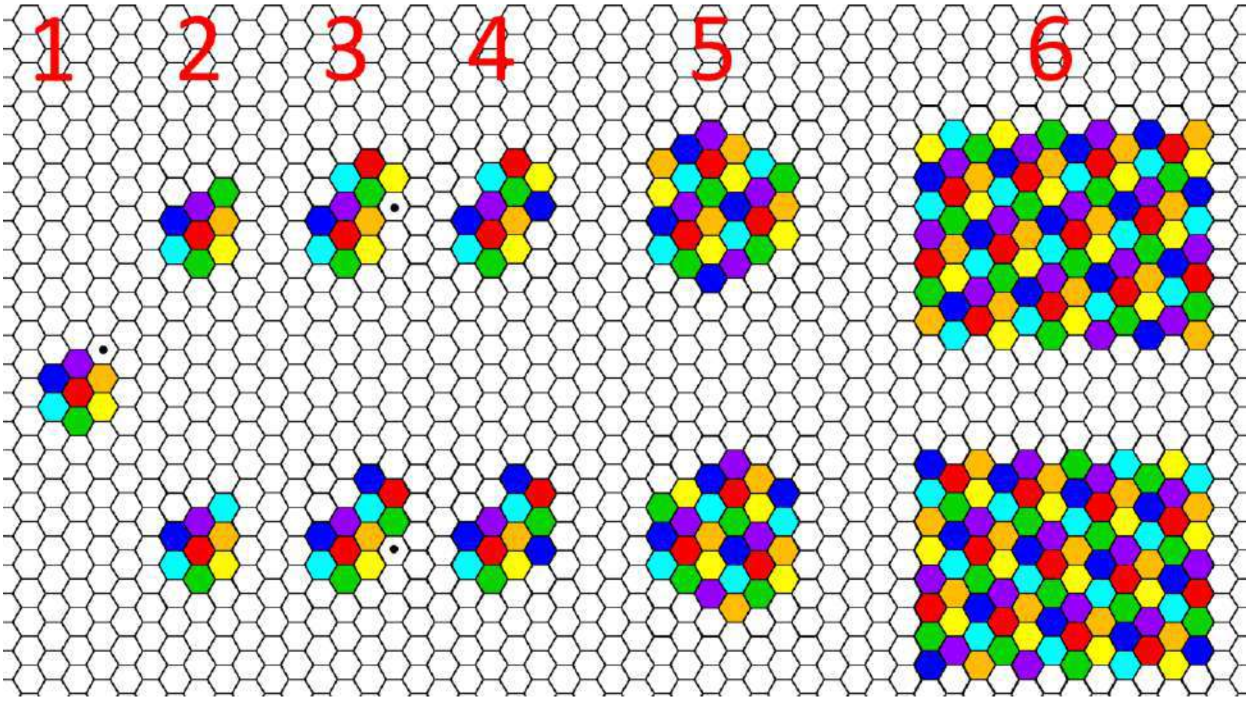
$$\mathbf{I} = 4\cdot\mathbf{N} = 4\cdot3{,}14\cdot10^{12} = 1{,}26\cdot10^{13} \text{ бит}$$
$$1{,}26\cdot10^{13} \text{ бит} = 1{,}57\cdot10^{12} \text{ Б} = 1{,}53\cdot10^{9} \text{ КБ} = 1{,}498\cdot10^{6} \text{ МБ} = 1463 \text{ ГБ} = 1{,}43 \text{ ТБ}$$

4. В этим случае одна наноструктура будет приходится на объем, равный 0,2·0,2·3 мкм^3. Тогда в объеме **V**, при условии, что одна наноструктура кодирует не 4, а 8 бит, можно будет записать

$$\mathbf{I} = 8\cdot4{,}52\cdot10^{-5}/(0{,}2\cdot10^{-6}\cdot0{,}2\cdot10^{-6}\cdot3\cdot10^{-6}) = 3\cdot10^{15} \text{ бит} = 343 \text{ ТБ информации.}$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 2. Графеновая радуга

1. Рассмотрим возможные способы раскраски, пошагово заполняя цветными шестиугольниками пространство вокруг уже известной «ромашки».



Шаг 1) Рассмотрим шестиугольник, отмеченный точкой. Он не может быть окрашен ни фиолетовым, ни оранжевым цветом, иначе мы получим два одинаково окрашенных шестиугольника рядом. Он также не может быть окрашен красным, поскольку это приведет к появлению двух красных шестиугольников в окружении фиолетового/оранжевого шестиугольников. Он не может быть окрашен в желтый (синий) цвет, поскольку это также приведет к нарушению условия семи разных цветов для «ромашки» с центром в фиолетовом (оранжевом) шестиугольнике.

Шаг 2) Следовательно, для этого шестиугольника возможны два варианта окраски: вариант I – зеленый (вверху) и вариант II – голубой (внизу). Далее будем указывать только номер варианта, для которого выбираем тот или иной цвет.

Шаг 3) Поскольку нам известно, как именно относительно I зеленого (II голубого) шестиугольника расположен красный шестиугольник, отметим его, а также еще пару известных цветов-соседей для каждого из случаев. При этом возникает шестиугольник (отмечен точкой), который оказывается единственным незакрашенным в «ромашке» с I зеленым (II оранжевым) центром.

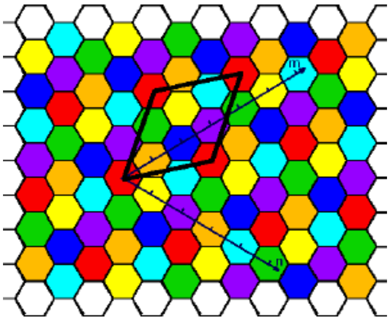
Шаг 4) И в первом, и во втором варианте до полного набора в «ромашке» не хватает синего цвета.

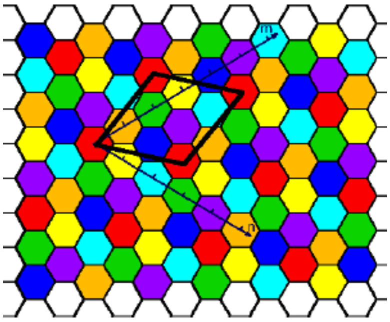
Шаги 5 и 6) Чередуя заполнение окружения красных шестиугольников по заданному шаблону с закрашиванием «последних» шестиугольников в некоторых «ромашках» (то есть, выполняя условие, что любая «ромашка» содержит строго 7 цветов), расширяем закрашенную область.

Таким образом, можно получить всего два не совпадающих друг с другом способа раскраски.

2. Оба способа раскраски являются периодическими. И в первом, и во втором способе раскраски минимальной повторяющейся областью является ромб, вершины которого лежат в серединах ближайших шестиугольников одного и того же цвета. Чтобы однозначно его задать, необходимо определить длину и положение на сетке шестиугольников одного из его ребер.

   Поместим начало косоугольной системы координат в одну из вершин ромба и расположим оси так, чтобы координаты, задающие «однотипные» стороны ромбов обеих раскрасок, были неотрицательными. Тогда (**n**, **m**) составляют (1,2) для первого случая и (2,1) для второго:





3. Как можно видеть, одному и тому же способу раскраски листа из правильных шестиугольников отвечают 7 разных «ромашек», по числу цветов раскраски, отвечающих центру группы. То есть, для однозначности выбора способа раскраски необходимо, во-первых, зафиксировать цвет центрального шестиугольника в «ромашке», а, во-вторых, задать индексы взаимного расположения центров двух «ромашек» друг относительно друга ((1,2) либо (2,1)).

   Число уникальных способов раскраски «ромашки» с фиксированным цветом центрального шестиугольника (скажем, красного) равно числу не совпадающих при повороте вокруг центра способов раскраски кольца из шести элементов в шесть разных цветов.

   Одному и тому же способу раскраски кольца из шести элементов отвечают шесть разных колец, по числу позиций, отличающихся лишь поворотом кольца вокруг центра «ромашки». То есть, для однозначности выбора способа раскраски кольца необходимо зафиксировать цвет одного из его шестиугольников, например, верхнего (скажем, фиолетовый). Тогда цвет второго шестиугольника в кольце можно выбрать пятью способами, третьего – четырьмя, четвертого – тремя, пятого – двумя, а последнего – одним способом.

   То есть, всего существует $\underline{5! = 120}$ не совпадающих при повороте вокруг центра способов раскраски кольца из шести элементов в шесть разных цветов.

   То есть, общее число уникальных способов, которыми можно раскрасить графеновую плоскость во все цвета радуги так, чтобы любой произвольно выбранный на ней фрагмент в форме «ромашки» был окрашен в 7 разных цветов, равно

$$120 \cdot 2 = 240.$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 3. Наноструктурный анод литий-ионного аккумулятора

1. Обозначим расстояние между центрами капель золота как **A**.

   Объем сферической капли золота радиусом **r** составляет

$$\mathbf{V_{Au}} = 4/3\pi \mathbf{r}^3. \quad (1)$$

   Каждая капля получается из фрагмента нанопленки золота объемом

$$\mathbf{V_{Au}} = \mathbf{S_0 h}, \quad (2)$$

где $\mathbf{S_0}$ – площадь, приходящаяся на одну каплю золота,
h – толщина исходной пленки золота.

   Приравнивая (1) к (2), находим

$$\mathbf{S_0} = \frac{4\pi r^3}{3h}. \quad (3)$$

   Рассмотрим правильный треугольник, вершины которого располагаются в центрах соседних атомов золота. Сторона такого треугольника равна **A**, а его площадь составляет

$$S_\Delta = 0{,}5A^2 \sin 60^\circ = A^2\sqrt{3}/4. \quad (4)$$

   На такой треугольник приходится

3·(1/6) = 0,5 капли золота (5)
(у каждого из треугольников 3 вершины, каждая из вершин является общей для 6 соседних треугольников).

   Тогда на одну каплю золота приходится площадь, равная

$$\mathbf{S_0} = \mathbf{S_\Delta}/0{,}5 = A^2\sqrt{3}/2. \quad (6)$$

   Приравнивая (3) к (6), находим расстояние между центрами капель золота

$$\mathbf{A} = \sqrt{2\,S_0/\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{8\pi r^3}{3h\sqrt{3}}}. \quad (7.1)$$

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{8\cdot 3{,}14\cdot 45^3}{3\cdot 15\sqrt{3}}} = 171{,}4 \text{ нм}. \quad (7.2)$$

2. Знная массу и плотность кремния, мы можем рассчитать суммарный объем всех кремниевых нанопроволок:

$$\mathbf{V_{Si}} = \mathbf{m}/\boldsymbol{\rho}. \quad (8)$$

В то же время, он равен общему объему всех цилиндров радиусом **r** и длиной **L**:

$$\mathbf{V_{Si} = N\pi r^2 L}, \qquad (9)$$

где **N** – общее число таких цилиндров, которое можно вычислить, зная размеры подложки и площадь, приходящуюся на один цилиндр (3):

$$\mathbf{N = a \cdot b / S_0} = \frac{3abh}{4\pi r^3}. \qquad (10)$$

Приравнивая (8) к (9) и подставляя в полученное выражение (10), находим длину кремниевой нанопроволоки:

$$\mathbf{L} = \frac{V_{Si}}{N\pi r^2} = \frac{m/\rho \cdot 4\pi r^3}{3abh \cdot \pi r^2} = \frac{4mr}{3abh\rho} \qquad (11.1)$$

$$\mathbf{L} = \frac{4 \cdot 75 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{6}} = 3{,}26 \cdot 10^{-5} \text{ метра} = 32{,}6 \text{ мкм}. \qquad (11.2)$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 4. Фаграфен

1.

а. В структуре фаграфена мы можем выделить три неэквивалентных по числу вершин многоугольника: **М5**, **М6** и **М7**, содержащие 5, 6 и 7 углов, соответственно. В то же время, можно видеть, что в структуре фаграфена шестиугольники имеют два типа окружения (обходим шестиугольник по часовой стрелке): 5-6’-7-5-6’-7 (**М6**) и 6’-7-6’-7-6-5 (**М6’**).

То есть, всего 4 типа неэквивалентных многоугольников: М5, М6, М6’ и М7.

б.

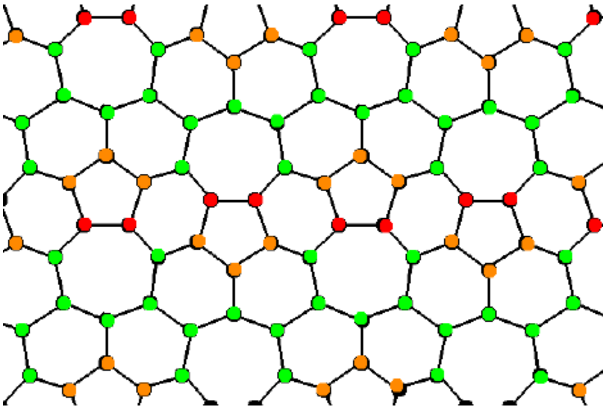


Рис. 1.

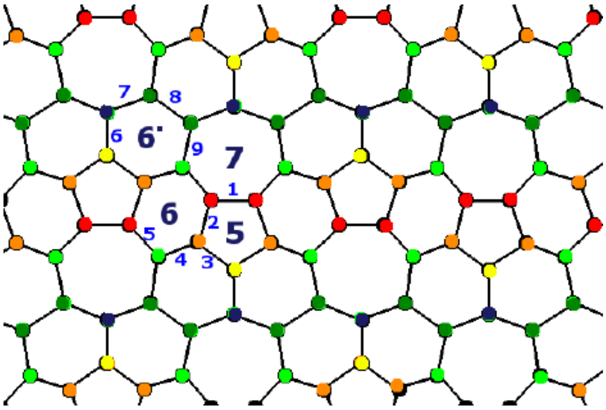


Рис. 2.

На первый взгляд (рис. 1), можно выделить три типа неэквивалентных узлов двумерной структуры (запишем цифрами встречающиеся возле узла многоугольники):

- **У1**: 567 (красный),
- **У2$_0$**: 566 (оранжевый)
- и **У3$_0$**: 667 (салатовый).

Но, поскольку, как мы уже выяснили, шестиугольники неодинаковы, то всего можно выделить 6 типов неэквивалентных узлов двумерной структуры (рис. 2):

- **У1**: 567 (красный),
- **У2**: 566’ (оранжевый),
- **У3**: 56’6’ (желтый),
- **У4**: 66’7 (салатовый),
- **У5**: 6’6’7 (зеленый, принадлежит ребру, соединяющей два М7)
- и **У6**: 6’6’7 (темно-синий, принадлежит ребру, соединяющей М5 и М7).

в. В фаграфене можно выделить 9 неэквивалентных видов ребер (см. рис. 2) (запишем типы узлов, которые соединяют эти ребра):

- **Р1**: У1-У1,
- **Р2**: У1-У2,
- **Р3**: У2-У3,
- **Р4**: У2-У4,
- **Р5**: У1-У4,
- **Р6**: У3-У6,
- **Р7**: У5-У6,
- **Р8**: У5-У5,
- **Р9**: У4-У5.

2. Один из вариантов выбора минимальной ячейки фаграфена отмечен на рис. 3 (вершины ячейки лежат в центрах семиугольников).

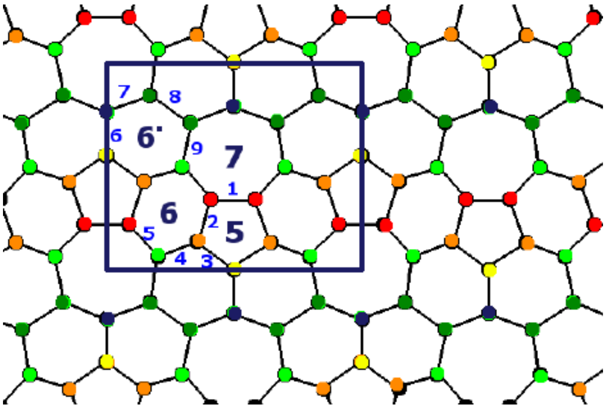


Рис. 3.

На такую ячейку приходится:

- 4**У1** + 4**У2** + 4/2**У3** + 4**У4** + 4**У5** + (1 + 2/2)**У6** = **20** узлов (атомов углерода),
- 1 + 2/2 = 2 М5 пятиугольника,
- 2 М6 шестиугольника первого типа,
- 2 + 6/3 = 4 М6' шестиугольника второго типа
- и 1 + 4/4 = 2 М7 семиугольника.

3. Чтобы сходящиеся в узловой точке ребра лежали в одной плоскости, необходимо, чтобы сумма плоских углов между ними была равна 360°.

Угол в правильном шестиугольнике равен 120°, поэтому графеновая сетка, в каждом узле которой сходится по 3 шестиугольника, будет плоской.

В то же время, угол в правильном пятиугольнике равен 108°, а в семиугольнике − примерно 128,6°. Тогда

- угол при узле **У1**(567) равен 356,6°,
- угол при узле **У2$_0$**(566) равен 348°
- и угол при узле **У3$_0$**(667) равен 368,6°,

то есть, ни один из узлов в структуре фаграфена не будет плоским.

Следовательно, фаграфен, составленный из правильных многоугольников <u>не может быть плоским</u>.

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 5. Нанороллы

а. Чтобы оценить по изображению требуемые параметры, каждый из них 3-4 раза измеряем линейкой, затем полученные величины усредняем и переводим в нанометры пропорционально длине бара.

Полученные таким образом средние значения составляют:

внутренний диаметр нанеролла $\mathbf{D_1}$ = 57 нм,
внешний диаметр наноролла $\mathbf{D_2}$ = 353нм,
высота наноролла **H** = 250 нм.

б. Число витков в алюмофосфатном наноролле **N** (рис. 1b условия) равно отношению толщины наноролла (то есть, разности внешнего и внутреннего радиусов) к периоду слоистой структуры наноролла (то есть, толщине отдельного алюмофосфатного слоя при условии, что лента сворачивается в плотную спираль без зазоров):

$$\mathbf{N} = \frac{D_2/2-D_1/2}{d} = \frac{353/2-57/2}{2{,}9} \approx 51.$$

Для того, чтобы рассчитать длину ленты алюмофосфата, которая получится, если наноролл полностью развернуть, рассмотрим площадь торцевой стороны этого наноролла. С одной стороны, она равна разности площадей кругов, отвечающих внешнему и внутреннему диаметрам наноролла:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{D_2}/2)^2 - (\mathbf{D_1}/2)^2),$$

а с другой может быть приближена как площадь прямоугольника, длина которого совпадает с искомой длиной ленты, а ширина – с периодом слоистой структуры наноролла (при этом мы считаем, что данный прямоугольник сворачивается в плотную спираль):

$$\mathbf{S} = \mathbf{Ld}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{D_2}/2)^2 - (\mathbf{D_1}/2)^2) = \mathbf{Ld}$$

и

$$\mathrm{L} = \frac{\pi((D_2/2)^2 - (D_1/2)^2)}{d}$$

$$\mathrm{L} = \frac{3{,}14((353/2)^2 - (57/2)^2)}{2{,}9}$$

L = 32868 нм = 32,9 мкм.

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 6. Эффективность вакцины

1. По определению, эффективностью вакцины **α** против некоторого исхода называется отношение снижение уровня данного исхода среди вакцинированной группы (то есть, разность уровня исхода для невакцинированных, $\mathbf{I_N}$ и уровня исхода для вакцинированных, $\mathbf{I_V}$) по сравнению с невакцинированной (то есть, уровень исхода для невакцинированных, $\mathbf{I_N}$), выраженное в процентах:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{I_N - I_V}{I_N} \cdot 100\%.$$

Это выражение можно записать как

$$\boldsymbol{\alpha} = 100\% - \frac{I_V}{I_N} \cdot 100\%.$$

В свою очередь, уровень снижения риска – это отношение уровня исхода конкретного события для невакцинированной группы к уровню исхода того же события для вакцинированной группы, равный

$$\frac{I_N}{I_V} = \frac{100\%}{100\% - \alpha}.$$

а. Люди, получившие данную вакцину, подвержены заражению COVID-19

в $\frac{100\%}{100\% - \alpha_З} = \frac{100\%}{100\% - 80\%} = 5$ раз меньше, чем невакцинированные.

б. Люди, получившие данную вакцину, подвержены тяжелому течению COVID-19

в $\frac{100\%}{100\% - \alpha_{ТТ}} = \frac{100\%}{100\% - 85\%} = 6{,}67$ раз меньше, чем невакцинированные.

в. Люди, получившие данную вакцину, подвержены смерти от COVID-19

в $\frac{100\%}{100\% - \alpha_С} = \frac{100\%}{100\% - 95\%} = 20$ раз меньше, чем невакцинированные.

2. Для удобства введем следующие обозначения:

V – число вакцинированных жителей,
N – число невакцинированных жителей региона,
$\mathbf{V_Г}$ – число вакцинированных жителей, госпитализированных с COVID-19,
$\mathbf{N_Г}$ – число невакцинированных жителей, госпитализированных с COVID-19.

По определению, эффективность рассматриваемой вакцины против госпитализации составляет

$$\boldsymbol{\alpha_Г} = \frac{N_Г/N - V_Г/V}{N_Г/N} \cdot 100\%.$$

Поскольку, по определению,

- доля вакцинированных среди всего населения

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}/(\mathbf{V} + \mathbf{N}),$$

- доля вакцинированных среди всех госпитализированных с COVID-19 людей

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{V}_\mathbf{Г}/(\mathbf{V}_\mathbf{Г} + \mathbf{N}_\mathbf{Г}),$$

то, выражая число невакцинированных,

$$\mathbf{N} = (1 - \boldsymbol{\omega})\mathbf{V}/\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{N}_\mathbf{Г} = (1 - \boldsymbol{\delta})\mathbf{V}_\mathbf{Г}/\boldsymbol{\delta},$$

можем записать величину $\mathbf{N}_\mathbf{Г}/\mathbf{N}$ через $\mathbf{V}_\mathbf{Г}/\mathbf{V}$:

$$\mathbf{N}_\mathbf{Г}/\mathbf{N} = (1 - \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\omega}/((1 - \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\delta})\cdot\mathbf{V}_\mathbf{Г}/\mathbf{V}.$$

Тогда эффективность вакцины против госпитализации равна:

$$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{Г} = \frac{(1-\delta)\omega/\left((1-\omega)\delta\right)V_\Gamma/V - V_\Gamma/V}{(1-\delta)\omega/\left((1-\omega)\delta\right)V_\Gamma/V}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{Г} = \frac{(1-\delta)\omega/\left((1-\omega)\delta\right) - 1}{(1-\delta)\omega/\left((1-\omega)\delta\right)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{Г} = \frac{(1-\delta)\omega - (1-\omega)\delta}{(1-\delta)\omega}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{Г} = \frac{\omega - \delta}{(1-\delta)\omega}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{Г} = \frac{0{,}6 - 0{,}2}{(1-0{,}2)0{,}6}\cdot 100\% \approx 83\%.$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 7. Полые металлические кластеры как луковица

1. Примем $\mathbf{n_1}$ равным $\mathbf{y}$, а $\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1} = \mathbf{\Delta}$ атомов металла.

   Зная длину ребра многогранника, сформированного плоскостями, проходящими через центры атомов граней ПМК, на ребро которого приходится **y** атомов металла диаметром **D**,

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}(\mathbf{y} - 1),$$

   можно рассчитать радиус сферы, вписанный в этот многогранник:

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{AD}(\mathbf{y} - 1),$$

   где **A** – коэффициент, определяемый типом многогранника.

   Тогда расстояние между слоями, на ребро которых приходится **y** и **y** + Δ атомов металла, соответственно, равно разности радиусов сфер, вписанных в отвечающие им многогранники:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}(\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}) - \mathbf{r}(\mathbf{y})$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{AD}(\mathbf{y} + \mathbf{\Delta} - 1) - \mathbf{AD}(\mathbf{y} - 1)$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{AD}(\mathbf{y} + \mathbf{\Delta} - 1 - \mathbf{y} + 1)$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{\Delta}$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{AD}(\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1})$$

   Рассмотрим полые металлические кластеры заданной формы.

   Для начала, выведем формулу радиуса сферы, вписанной в тетраэдр, чтобы найти соответствующее ему значение величины **A**. Для этого рассмотрим тетраэдр **ABCD** с ребром длиной **L**.

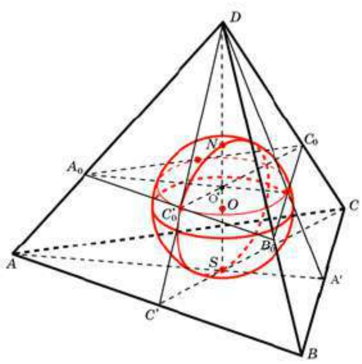


*Рис. 1. Тетраэдр **ABCD** со вписанной в него сферой радиуса **r = OS = OC'₀**.*

   Для начала рассмотрим **ΔDSC'**.

   Высота грани тетраэдра $\mathbf{DC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{L}$.

   Радиус окружности, вписанной в правильный **ΔABC**, $\mathbf{SC'} = \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{L}$.

Тогда высота тетраэдра **DS** = $\frac{\sqrt{6}}{3}$**L**.

Теперь рассмотрим подобные по двум углам прямоугольные треугольники **ΔDSC'** и **ΔDC'$_0$O**:

$$DC':DO = SC':OC'_0$$
$$DC':(DS - SO) = SC':OC'_0$$
$$DC' \cdot OC'_0 = SC'(DS - SO)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{6}L\left(\frac{\sqrt{6}}{3}L - r\right)$$
$$r = \frac{\sqrt{6}}{12}L$$
$$A = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Теперь найдем значения **A**, отвечающие равносторонним **n**-угольным бипирамидам с **n** = 3, 4, 5. Для этого в общем виде выведем формулу радиуса сферы, вписанной в такую бипирамиду, исходя из свойств касательных к окружности:

$$r = h \cdot p/q = p\sqrt{q^2 - p^2}/q$$

h = $\sqrt{q^2 - p^2}$ – высота правильной **n**-угольной пирамиды с ребром длиной **L**,
p – радиус окружности, вписанной в правильный **n**-угольник с ребром длиной **L**,
q – высота равностороннего треугольника с ребром длиной **L**.

Следовательно, для **n**-угольных бипирамид коэффициент **A** равен

$$A = \frac{p\sqrt{q^2 - p^2}}{q \cdot L}.$$

Рассчитаем значение **A** для каждого из **n**.

- Треугольная бипирамида (**n** = 3)

$$p = \frac{\sqrt{3}}{6}L,$$
$$q = \frac{\sqrt{3}}{2}L,$$
$$\sqrt{q^2 - p^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}L,$$
$$A = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} / \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

- Октаэдр (**n** = 4)

$$p = 0{,}5L,$$
$$q = \frac{\sqrt{3}}{2}L,$$
$$\sqrt{q^2 - p^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}L,$$
$$A = 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} / \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

- Пятиугольная бипирамида (**n** = 5)

$$\mathbf{p} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{10}\mathbf{L},$$

$$\mathbf{q} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{L},$$

$$\sqrt{q^2 - p^2} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}\mathbf{L},$$

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{10}\cdot\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}/\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6\sqrt{5}}.$$

Подводя итог, запишем формулы зависимости расстояния **d** между треугольными гранями двух вложенных друг в друга ПМК от $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и диаметра атома металла **D** для:

а. тетраэдра $\mathbf{d} = \frac{\sqrt{6}}{12}\mathbf{D}(\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1})$;

б. треугольной бипирамиды $\mathbf{d} = \frac{\sqrt{6}}{9}\mathbf{D}(\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1})$;

в. октаэдра $\mathbf{d} = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{D}(\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1})$;

г. пятиугольной бипирамиды $\mathbf{d} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6\sqrt{5}}\mathbf{D}(\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1})$;

д. икосаэдра

$$\mathbf{A} = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \text{ (формула из справочника),}$$

$$\mathbf{d} = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\mathbf{D}(\mathbf{n_2} - \mathbf{n_1}).$$

2. Искомое расстояние равно высоте тетраэдра, сформированного тремя атомами металла из нижележащего «луковичного» слоя и одним атомом из вышележащего слоя. Длина ребра такого тетраэдра составляет **D** (диаметр атома металла)

$$\mathbf{d_0} = \frac{\sqrt{6}}{3}\mathbf{D}.$$

3. ПМК могут образовывать плотноупакованные луковицы тогда и только тогда, когда условию $\mathbf{d} = \mathbf{d_0}$ отвечает целое число атомов (то есть, $\mathbf{\Delta} \in N$). Рассчитаем данную величину для каждого из многогранников.

Преобразуя условие $\mathbf{d} = \mathbf{d_0}$, получаем:

$$\mathbf{AD\Delta} = \frac{\sqrt{6}}{3}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{A\Delta} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\mathbf{\Delta} = \frac{\sqrt{6}}{3A}$$

Рассмотрим конкретные ПМК:

а. тетраэдр $\mathbf{\Delta} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{12}{\sqrt{6}} = 4$;

б. треугольная бипирамида $\mathbf{\Delta} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{9}{\sqrt{6}} = 3$;

в. октаэдр **Δ** = $\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{6}}$ = 2;

г. пятиугольная бипирамида **Δ** = $\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ ≈ 1,95;

д. икосаэдр **Δ** = $\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}$ ≈ 0,84.

Поскольку **Δ**$\in N$, а для ПМК в форме пятиугольной бипирамиды и икосаэдра данная величина не является целым числом, то эти ПМК не могут образовывать плотноупакованные луковицы. То есть, широко распространенные нанокластеры металлов в форме икосаэдра не имеют плотной шаровой упаковки.

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 8. Геометрия нанокластера $RuSn_9$

1. Многогранник **X** может быть представлен как правильная треугольная призма, на боковые грани-квадраты которой помещены три правильных квадратных пирамиды. Такой многогранник носит название «трижды наращённая треугольная призма» и имеет 9 вершин, 14 граней в форме правильных треугольников и 21 ребро.

2. Минимальный размер будет иметь нанокластер в форме трижды наращенной треугольной призмы, в котором атом Ru, расположенный в центре, будет касаться шести атомов олова, формирующих «центральную» призму, Sn1−Sn3[i].

   a.

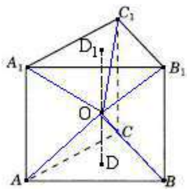


Рис. 1. Равносторонняя треугольная призма $\boldsymbol{ABCA_1B_1C_1}$.

Чтобы найти длину ребра трижды наращенной треугольной призмы, рассмотрим равностороннюю призму $\mathbf{ABCA_1B_1C_1}$ (рис. 1), вершины которой отвечают положению центров атомов Sn1 −Sn3[i], а центр − положению центра атома Ru (точка **O**). Ребро данной призмы **A** и будет ребром искомого многогранника, то есть, расстоянием между центрами ближайших атомов Sn.

Отрезки, соединяющие вершины призмы с ее центром, равны

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}(Sn) + \mathbf{r}(Ru) = 0{,}157 + 0{,}113 = 0{,}27 \text{ нм}.$$

Рассмотрим треугольную пирамиду **ABCO**, имеющую основание с длиной ребра **A** и боковые ребра с длиной **B**.

С одной стороны, высота этой треугольной пирамиды равна половине высоты треугольной призмы:

$$\mathbf{OD} = 0{,}5\mathbf{DD_1} = 0{,}5\mathbf{AA_1} = 0{,}5\mathbf{A}.$$

С другой, ее можно вычислить по теореме Пифагора для Δ**BDO**:

$$\mathbf{OD}^2 = \mathbf{OB}^2 - \mathbf{DB}^2,$$

где $\mathbf{DB} = \mathbf{A}\sqrt{3}/3$ – радиус окружности, описанной вокруг Δ**ABC**.

$$(0{,}5\mathbf{A})^2 = \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A}\sqrt{3}/3\,)^2$$
$$\mathbf{A}^2/4 + \mathbf{A}^2/3 = \mathbf{B}^2$$
$$7\mathbf{A}/12 = \mathbf{B}^2$$
$$\mathbf{A} = \sqrt{12/7}\,\mathbf{B}$$
$$\mathbf{A} = \sqrt{12/7}\cdot 0{,}27 = \underline{0{,}354 \text{ нм.}}$$

б. В случае многогранника **X** на ограничивающей сфере будут лежать только вершины трех пирамид-«надстроек» (центры атомов Sn4, Sn5 и Sn6), остальные же шесть вершин, формирующие правильную треугольную призму, будут лежать внутри такой сферы.

Таким образом, радиус ограничивающей сферы **R** будет складываться из

- высоты правильной квадратной пирамиды со стороной **A**, **a** =($\sqrt{2}/2$)**A**,
- и расстояния от центра призмы до центра ее квадратных граней, равного радиусу окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной **A**, **b** = ($\sqrt{3}/6$)**A**:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$
$$\mathbf{R} = 0{,}5\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}/3\right)\mathbf{A}$$
$$\mathbf{R} = 0{,}5\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}/3\right)0{,}354 = 0{,}352 \text{ нм.}$$

Тогда диаметр сферы, ограничивающей нанокластер $RuSn_9$ (с учетом размера атома Sn), равен:

$$\mathbf{D} = 2(\mathbf{R} + \mathbf{r}(\mathrm{Sn})),$$
$$\mathbf{D} = 2(0{,}352 + 0{,}157) = 1{,}018 \text{ нм.}$$

в. Атом Ru, расположенный в центре трижды наращенной треугольной призмы, касается шести атомов олова, формирующих треугольную призму, Sn1−Sn3^{i}.

Поскольку расстояние между центрами ближайших атомов Sn (0,354 нм) больше, чем удвоенный радиус атома олова (2·0,157 = 0,314 нм), то атомы Sn в нанокластере в форме трижды наращенной треугольной призмы не касаются друг друга.

Расстояние между центром атома Ru и центрами атомов Sn4, Sn5, Sn6 (0,352 нм) больше, чем удвоенный радиус атома олова (2·0,157 = 0,314 нм), то есть, атом Ru не касается атомов Sn4, Sn5, Sn6.

3. Если взять трижды наращенную треугольную призму с ребром равным 2**r**(Sn) (все атомы олова касаются друг друга) и увеличить в ней только высоту «внутренней» призмы, образованной шестью атомами Sn1−Sn3^{i} так, чтобы в ее «внутреннюю полость» поместился атом Ru (касаясь всех атомов этой призмы), то изменится длина всего трех ребер, задающих высоту этой призмы (Sn1−Sn1^{i} ($\mathbf{AA_1}$, см. рис. 1), Sn2−Sn2^{i} ($\mathbf{BB_1}$), Sn3−Sn3^{i} ($\mathbf{CC_1}$)), а длина остальных 18-ти ребер многогранника останется неизменной.

Такая структура отвечает сохранению максимального числа касаний (сохраняются попарные касания остальных атомов Sn между собой, то есть, **AB** = **BC** = **CA** = $\mathbf{A_1B_1}$ = $\mathbf{B_1C_1}$ = $\mathbf{C_1A_1}$ = **A** = 2**r**(Sn) = 0,314 нм, также данной величине равна длина всех боковых ребер четырехугольных пирамид).

Обозначим неизвестную нам длину $\mathbf{AA_1}$ как **C**, тогда отрезки, соединяющие вершины призмы с ее центром, равны

$$\mathbf{B} = \mathbf{OB} = \sqrt{OD^2 + DB^2},$$
$$\mathbf{B} = \sqrt{(0{,}5C)^2 + \left(A\sqrt{3}/3\right)^2}.$$

Поскольку (по условию максимального числа касаний в пределах нанокластера) минимально необходимая длина **B** составляет **r**(Sn) + **r**(Ru), то

$$\mathbf{C} = 2\sqrt{B^2 - A^2/3},$$
$$\mathbf{C} = 2\sqrt{\left(r(Sn) + r(Ru)\right)^2 - 4/3 \cdot r^2(Sn)},$$
$$\mathbf{AA_1} = \mathbf{C} = 0{,}4 \text{ нм}.$$

В случае многогранника **Y** на ограничивающей сфере будут лежать только вершины трех пирамид-«надстроек» (центры атомов Sn4, Sn5 и Sn6), остальные же шесть вершин, формирующие треугольную призму, будут лежать внутри такой сферы.

Высоту прямоугольной пирамиды Sn4Sn1Sn1^{i}Sn3^{i}Sn3 в многограннике **Y** находим по теореме Пифагора:

$$\mathbf{a} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\right)^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2},$$
$$\mathbf{a} = 0{,}5\sqrt{3A^2 - C^2},$$
$$\mathbf{a} = 0{,}5\sqrt{3A^2 - 4(B^2 - A^2/3)},$$
$$\mathbf{a} = \sqrt{13/12 \cdot A^2 - B^2}.$$

Расстояние от центра призмы до центра ее четырехугольных граней равно радиусу окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной **A**,

$$\mathbf{b} = \sqrt{3}/6\mathbf{A}.$$

Тогда радиус сферы, ограничивающей его, равен

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$
$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{13}{12}A^2 - B^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}A$$
$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{13}{3}r(Sn)^2 - \left(r(Sn) + r(Ru)\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}r(Sn)$$
$$\mathbf{R} = 0{,}275 \text{ нм}.$$

Тогда диаметр сферы, ограничивающей нанокластер $RuSn_9$ (с учетом размера атома олова), равен

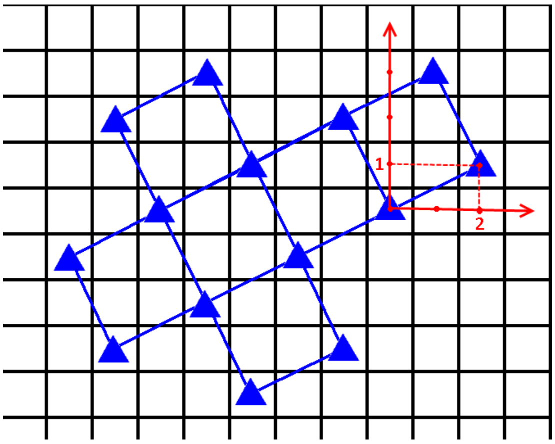
$$\mathbf{D} = 2(\mathbf{R} + \mathbf{r}(\mathrm{Sn})),$$
$$\mathbf{D} = 2(0{,}275 + 0{,}157) = 0{,}864 \text{ нм}.$$

В структуре нанокластера $RuSn_9$, имеющего форму многогранника **Y**, пары касающихся атомов Sn образуют треугольные грани призмы и боковые ребра четырехугольных пирамид (то есть, касания нет только в парах Sn1–Sn1^i, Sn2–Sn2^i, Sn3–Sn3^i). Атом Ru, расположенный в центре многогранника **Y**, касается шести атомов олова, формирующих треугольную призму, Sn1–Sn3^i, а также почти касается атомов Sn4, Sn5 и Sn6 (**R** = 0,275 нм лишь немногим больше **B** = 0,27 нм).

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 9. Четырехвалентные многогранники Гольдберга

1. Развертка каркаса **Г** состоит из шести квадратов, то есть, представляет собой развертку поверхности куба с вершинами в точках, отмеченных треугольниками (рис. 1б условия).

2. Чтобы задать развертку куба, достаточно однозначно определить одно из его ребер в прямоугольной системе координат, связанной с сеткой квадратов, образованных атомами металла, соединенными органическими «мостиками»:



Ребро каркаса **А** задается параметрами (2, 1).

3. Обозначим длину единичного отрезка, задающего сетку квадратов, как **r**. Тогда длину стороны квадратной грани развертки можно рассчитать по теореме Пифагора как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами **ar** и **br**:

$$\mathbf{K} = \sqrt{a^2r^2 + b^2r^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\mathbf{r}.$$

Площадь развертки каркаса **Г**, в свою очередь, представляет собой сумму площадей шести квадратов со стороной **K**:

$$\mathbf{S} = 6\mathbf{K}^2 = 6(\sqrt{a^2 + b^2}\mathbf{r})^2 = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\mathbf{r}^2.$$

В тоже время, на площадь одного квадрата сетки $\mathbf{S_1} = \mathbf{r}^2$ приходится 4·1/4 = 1 атом металла, лежащий в вершинах квадратов сетки.

Следовательно, общее число атомов металла, приходящееся на развертку каркаса **Г**, составляет

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}/\mathbf{S_1} = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2).$$

Для каркаса **А** общее число атомов металла равно

$$\mathbf{M}(2, 1) = 6(2^2 + 1^2) = 30.$$

Или, по рис. 1б условия: на каждый квадрат развертки приходится 5 атомов металла, всего таких квадратов 6. Таким образом, общее число атомов металла в каркасе **А** равно **M** = 5·6 = 30.

4. Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

где для многогранника, составленного из треугольников и квадратов, сходящихся в каждой вершине по четыре,

$$\text{число вершин } \mathbf{V} = 3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4},$$
$$\text{число ребер } \mathbf{E} = 3/2\mathbf{F_3} + 4/2\mathbf{F_4} = 2\mathbf{V},$$
$$\text{число граней } \mathbf{F} = \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4}.$$

Тогда

$$3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4} - 3/2\mathbf{F_3} - 4/2\mathbf{F_4} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} = 2$$
$$1/4\mathbf{F_3} = 2$$
$$\mathbf{F_3} = 8$$

Выведем из формулы Эйлера значение **F** и запишем его через параметры (**a**, **b**) для каркаса:

$$\mathbf{F} = 2 - \mathbf{V} + \mathbf{E} = 2 - \mathbf{V} + 2\mathbf{V} = 2 + \mathbf{V}$$
$$\mathbf{F} = 2 + \mathbf{M} = 2 + 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$$

Тогда

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{F} - \mathbf{F_3} = 2 + \mathbf{M} - 8 = \mathbf{M} - 6 = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - 6.$$

Следовательно, для каркаса **A**

$$\mathbf{F_3} = 8,$$
$$\mathbf{F_4} = 6(2^2 + 1^2) - 6 = 24.$$

5. Поскольку $\mathbf{M} = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$, следовательно, одно из главных условий проверки существования каркаса **Г** – это проверка делимости **M** на 6.

   а. $\mathbf{M} = 2022 = 6 \cdot 337$, что отвечает каркасу **Г** с параметрами (16, 9):

   $$337 = 16^2 + 9^2.$$

   б. $\mathbf{L} = 2022$, $\mathbf{M} = 0{,}5\mathbf{L} = 1011$, не делится на 6 – такой каркас не существует.

   в. $\mathbf{F_3} = 2022$, не существует, поскольку в каркасе **Г** строго 8 треугольных граней.

   г. $\mathbf{F_4} = 2022$, $\mathbf{M} = \mathbf{F_4} + 6 = 2028 = 6 \cdot 338$,

   что отвечает двум вариантам каркаса **Г**, с параметрами (15, 13) и (17, 7):

   $$338 = 15^2 + 13^2 = 17^2 + 7^2.$$

   д. $\mathbf{F} = 2022$, $\mathbf{M} = \mathbf{F} - 2 = 2020$, не делится на 6 – такой каркас не существует.

Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 10. Необычные углеродные структуры

1.

а. В местах склейки, отмеченных розовым цветом, образуются пятиугольники, а в местах, отмеченных желтым – семиугольники.

б. В типах 1а и 1б пятиугольники лежат в вершинах шестиугольной призмы, в типах 2а и 2б – в вершинах равносторонней (на примере из условия) шестиугольной антипризмы. Семиугольники в типе 1б лежат в вершинах шестиугольной призмы, в типе 2б – в вершинах шестиугольной антипризмы. Таким образом, тип 1б представляет собой шестиугольную призму, соосно к которой удалена меньшая по размеру шестиугольная призма, а тип 2б, соответственно, шестиугольную антипризму, соосно к которой удалена меньшая по размеру шестиугольная антипризма. Типы 1б и 2б представляют собой углеродные торы.

в. Поскольку шестиугольная призма (антипризма) является симметричным многогранником, то для того, чтобы ее однозначно задать, необходимо два параметра: длина ребра, соединяющего соседние вершины шестиугольного основания, – отрезок с параметрами ($\mathbf{n_1}$, 0), и длина ребра, соединяющего две ближайшие вершины разных оснований, – отрезок с параметрами ($\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_2}$) (для антипризмы ($\mathbf{n_2}$, 0)). В случае углеродных торов (типы 1б и 2б) добавляется еще один параметр – длина ребра «малой» шестиугольной призмы (антипризмы), отрезок с параметрами ($\mathbf{n_3}$, 0). Высота в этом случае совпадает с высотой большего многогранника и поэтому не является независимым параметром. Схематично упомянутые отрезки отмечены на рисунке (рис. 1).

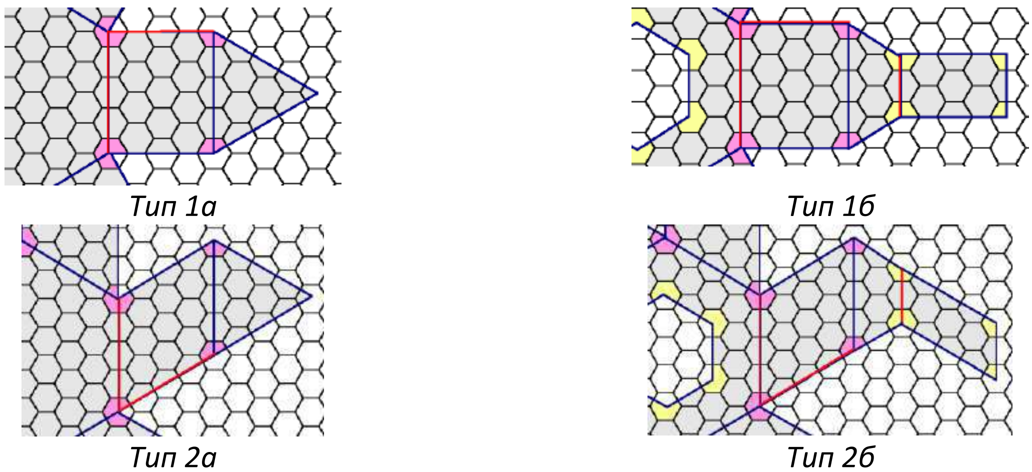


Рис. 1. Красным отмечены отрезки, однозначно задающие развертки соответствующих углеродных структур.

г. Тип 1а (4, 0)(2, 2), тип 1б (4, 0)(2, 2)(2, 0), тип 2а (4, 0)(4, 0), тип 2б (4, 0)(4, 0)(2, 0).

2. Общее число атомов в каркасной углеродной структуре **N** равно отношению площади ее поверхности к площади, приходящейся на один атом углерода в графене, равной

$$\mathbf{S_C} = 0{,}5(\mathbf{a}\sqrt{3})^2\sin 60°,$$

где **a** – длина связи С–С.

Площадь поверхности шестиугольной призмы складывается из удвоенной площади шестиугольного основания и 6 площадей боковых прямоугольников, а шестиугольной антипризмы – из площадей оснований и 12 площадей боковых треугольников. В то же время, площадь равностороннего шестиугольника может быть представлена как совокупность площадей шести равносторонних треугольников, а трапеция – как разность площади двух равносторонних треугольников. Следовательно, нам необходимо найти площади равностороннего треугольника и прямоугольника в зависимости от (**n**, **m**).

- Любой равносторонний треугольник со стороной, задаваемой на графеновой сетке парой индексов (**n**, 0), имеет площадь

  $$\mathbf{S_{n,0}} = 0{,}5(R_{\mathbf{n,0}}\mathbf{a}\sqrt{3})^2\sin 60°,$$

  где $\mathbf{R_{n,0}} = \mathbf{n}$ – длина стороны такого треугольника в косоугольной системе координат.

  Тогда общее число атомов углерода, приходящихся на такой треугольник, составляет

  $$\mathbf{T_{n,0}} = \frac{S_{n,0}}{S_C} = \frac{0{,}5\left(R_{n,0}a\sqrt{3}\right)^2 sin60^o}{0{,}5\left(a\sqrt{3}\right)^2 sin60^o} = \mathbf{R_{n,0}}^{\mathbf{2}} = \mathbf{n}^2.$$

- В свою очередь, на шестиугольник, задаваемой на графеновой сетке парой индексов (**n**, 0), приходится $6\mathbf{T_{n,0}}$ атомов углерода.

- Тогда на трапецию, основания которой задаются на графеновой сетке индексами ($\mathbf{n_1}$, 0) и ($\mathbf{n_2}$, 0), $\mathbf{n_1}>\mathbf{n_2}$, приходится $\mathbf{Tr_{(n1,0)(n2,0)}} = \mathbf{T_{n1,0}} - \mathbf{T_{n2,0}}$ атомов углерода.

- Площадь прямоугольника, стороны которого задаются на графеновой сетке индексами ($\mathbf{n_1}$, 0) и ($\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_2}$), можно записать как

  $$\mathbf{S_{(n1,0)(n2,n2)}} = (R_{\mathbf{n1,0}}\mathbf{a}\sqrt{3})(R_{\mathbf{n2,n2}}\mathbf{a}\sqrt{3}) = \sqrt{n_1{}^2}\sqrt{3n_2{}^2}\left(a\sqrt{3}\right)^2 = 3\sqrt{3}\mathbf{n_1n_2a}.$$

  Тогда общее число атомов углерода, приходящихся на него,

  $$\mathbf{P_{(n1,0)(n2,n2)}} = \frac{S_{(n1,0),(n2,n2)}}{S_C} = \frac{3\sqrt{3}n_1n_2a^2}{0{,}5\left(a\sqrt{3}\right)^2 sin60^o} = 4\mathbf{n_1n_2}.$$

- Площадь параллелограмма, стороны которого задаются индексами ($\mathbf{n_1}$, 0) и ($\mathbf{n_2}$, 0), можно записать как

  $$\mathbf{S_{(n1,0)(n2,0)}} = (R_{\mathbf{n1,0}}\mathbf{a}\sqrt{3})(R_{\mathbf{n2,0}}\mathbf{a}\sqrt{3})\sin 60°.$$

Тогда общее число атомов углерода, приходящихся на него,

$$\mathbf{Pl}_{(n1,0)(n2,0)} = \frac{S_{(n1,0),(n2,0)}}{S_C} = \frac{(R_{n1,0}a\sqrt{3})(R_{n2,0}a\sqrt{3})\sin 60^o}{0{,}5(a\sqrt{3})^2\sin 60^o} = 2\mathbf{R}_{n1,0}\mathbf{R}_{n2,0} = 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2.$$

Общее число атомов в зависимости от типа составляет:

- $\mathbf{N}_{1a} = 2\cdot 6\mathbf{T}_{n1,0} + 6\cdot\mathbf{P}_{(n1,0)(n2,n2)} = 2\cdot 6\mathbf{n}_1^2 + 6\cdot 4\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$

  $\mathbf{N}_{1a} = 12\mathbf{n}_1^2 + 24\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$

- $\mathbf{N}_{1б} = 12\cdot\mathbf{Tr}_{(n1,0)(n3,0)} + 6\cdot\mathbf{P}_{(n1,0)(n2,n2)} + 6\cdot\mathbf{P}_{(n2,n2)(n3,0)} = 12\cdot(\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_3^2) + 6\cdot 4\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 6\cdot 4\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3$

  $\mathbf{N}_{1б} = 12(\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_3^2) + 24\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 24\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3$

- $\mathbf{N}_{2a} = 2\cdot 6\mathbf{T}_{n1,0} + 6\cdot\mathbf{Pl}_{(n1,0)(n2,0)} = 2\cdot 6\mathbf{n}_1^2 + 6\cdot 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$

  $\mathbf{N}_{2a} = 12\mathbf{n}_1^2 + 12\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$

- $\mathbf{N}_{2б} = 12\cdot\mathbf{Tr}_{(n1,0)(n3,0)} + 6\cdot\mathbf{Pl}_{(n1,0)(n2,0)} + 6\cdot\mathbf{Pl}_{(n2,0)(n3,0)} = 12\cdot(\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_3^2) + 6\cdot 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 6\cdot 2\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3$

  $\mathbf{N}_{2б} = 12(\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_3^2) + 12\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 12\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3$

Рассчитаем значение **N** для каждой из представленных на рис. 2 условия углеродных структур:

- тип 1а: $\mathbf{N}_{1a}$ (4, 0)(2, 2) = $12\cdot 4^2 + 24\cdot 4\cdot 2 = 384$;
- тип 1б: $\mathbf{N}_{1б}$ (4, 0)(2, 2)(2, 0) = $12(4^2 - 2^2) + 24\cdot 4\cdot 2 + 24\cdot 2\cdot 2 = 432$;
- тип 2а: $\mathbf{N}_{2a}$ (4, 0)(4, 0) = $12\cdot 4^2 + 12\cdot 4\cdot 4 = 384$;
- тип 2б: $\mathbf{N}_{2б}$ (4, 0)(4, 0)(2, 0) = $12(4^2 - 2^2) + 12\cdot 4\cdot 4 + 12\cdot 4\cdot 2 = 432$.

Как можно видеть, при условии $\mathbf{n}_1$(1а) = $2\mathbf{n}_2$(1а) = $\mathbf{n}_1$(2а) = $\mathbf{n}_2$(2а) структуры типов 1а и 2а имеют равное число атомов углерода.

Для типов 1б и 2б условием равенства числа атомов будет $\mathbf{n}_1$(1б) = $2\mathbf{n}_2$(1б) = $2\mathbf{n}_3$(1б) = $\mathbf{n}_1$(2б) = $\mathbf{n}_2$(2б) = $2\mathbf{n}_3$(2б).

3. Рассчитаем диаметр сферы, описанной вокруг равносторонней шестиугольной антипризмы.

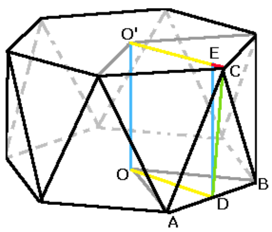


Рис. 2. Равносторонняя шестиугольная антипризма с дополнительными построениями, необходимыми для вычисления радиуса описанной вокруг нее сферы.

Введем обозначение для высоты равносторонней шестиугольной антипризмы (рис. 2) **H** = **OO’**, а также для длины ее ребер **AB** = **AC** = **BC** = **A**. Отметим, что из построения следуют следующие факты:

ED = **OO’** = **H**,
O’C = **AB** = **A**.

Рассмотрим прямоугольный Δ**CDE**.

Его гипотенуза **DC** равна высоте правильного треугольника Δ**ABC**:

DC = **h** $=0{,}5A\sqrt{3}$.

В то же время, из построения,

DC = **OD = EO’**.

Отсюда находим

CE = **O’C** – **EO’** = **A** – 0,5**A**$\sqrt{3}$ = 0,5A(2 – $\sqrt{3}$) = **b**.

Тогда

$$\mathbf{H} = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{0{,}75A^2 - 0{,}25A^2\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \mathbf{A}\sqrt{\sqrt{3}-1}.$$

В свою очередь, диаметр описанной сферы составляет

$$\mathbf{D} = 2\sqrt{OC^2 + (OO'/2)^2}$$
$$\mathbf{D} = 2\sqrt{A^2 + 0{,}25H^2}$$
$$\mathbf{D} = 2\mathbf{A}\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2}$$
$$\mathbf{D} = 2\mathbf{A}\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$
$$\mathbf{D} \approx 2{,}48\mathbf{A}$$

Для углеродной структуры типа 2б:

$$\mathbf{A} = \sqrt{3}\mathbf{an_1},$$
$$\mathbf{D} = 2{,}48\cdot\sqrt{3}\cdot 0{,}14\cdot 4 \approx 2{,}41 \text{ нм}.$$

Расчет с использованием приближенной оценки **H** ≈ **h**, приводящий к ответу **D** ≈ 2,11 нм, оценивается неполным баллом.