



Математика для школьников

Комплекс предметов

Категория участников: школьники 7-11 классов

Блок теоретических заданий по **математике для школьников 7-11 классов** включает задачи разной сложности. Для повышения вероятности прохождения на заключительный тур желательно решить задачи не только по математике, но и по физике, биологии, химии, чтобы набрать больше баллов. Дополнительные баллы будут начислены за прохождение двух тестов: ["Нанотест - приглашение на Олимпиаду"](#) и ["Тест ЗНТШ"](#).

Задания

1. 2021 и фуллерены

Молекулы фуллеренов представляют собой выпуклые многогранники, имеющие только пяти- и шестиугольные грани, в каждой вершине которых сходится по 3 ребра. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, рассчитайте...

2. Спираль коронавируса

Вся наследственная информация вируса SARS-CoV-2 представляет собой единичную цепочку РНК. Внутри сферической оболочки вирусной частицы эта цепочка намотана (в двух направлениях – туда и обратно) на белковое веретено и «инкрустирована» белками в спиральный нуклеокапсид...

3. Полипептид как цепочка букв

Некоторый полипептид можно представить как последовательность, в которую в определенном порядке «конец-к-началу» связаны «буквы» аминокислотных остатков. Одна из распространенных задач при изучении полипептидов – установление их первичной структуры...

4. Каркасные молекулы нитрида бора

Нитрид бора B_xN_x способен образовывать двух- и трехмерные структуры, во всех

вершинах которых сходится по три ребра. При этом ребро всегда соединяет только разнородные атомы. «Выкройка» некоторых каркасных молекул B_xN_x может быть построена на сетке BN...

5. Нанопористое углеволокно

Композитное волокно, внутри которого в матрице полиакрилонитрила (PAN) расположены нити полистирола (PS), получается путем формования массы PAN с PS. При отжиге композитного волокна из матрицы удаляется полистирол, а сама она превращается в углерод...

6. Ошибка тест-системы

Один из способов выявить, болеет ли человек COVID-19 – это проведение ПЦР-теста, когда мазок, взятый у потенциального больного, анализируют на присутствие вирусного генома. Однако тесты могут ошибаться, давая как ложноположительные, так и ложно отрицательные результаты...

7. Поиск CRISPR в геноме E. Coli

Нобелевская премия по химии 2020 года была присуждена за развитие метода редактирования генома, базирующегося на использовании системы адаптивного иммунитета бактерий, направленной на борьбу с вирусами...

8. Супертетраэдр и Супертетраэдр Серпинского

Некоторые бинарные соединения M_aY_b , в структуре которых атом металла **M** имеет тетраэдрическое окружение из атомов **Y**, могут образовывать нанокластеры в форме супертетраэдров **T_n**. Число тетраэдров $MY_4(n)$, приходящееся на ребро **T_n**, называется поколением супертетраэдра...

9. Поиск простейших ПМК с шестиугольными и треугольными гранями

Рассмотрим полый металлический кластер (ПМК) в форме выпуклого многогранника **X**, грани которого являются равносторонними треугольниками и шестиугольниками, а в каждой вершине сходится по **y** ребер. Какие значения может принимать **y**?

10. Биметаллический кубookтаэдр

Для повышения каталитической активности часть атомов в структуре металлических нанокластеров **A** заменяется на атомы второго металла **B** таким образом, что между

любыми соседними атомами **В** расположен один атом **А...**



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 1. 2021 и фуллерены

Молекулы фуллеренов представляют собой выпуклые многогранники, имеющие только пяти- и шестиугольные грани, в каждой вершине которых сходится по 3 ребра.

Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, рассчитайте, сколько вершин, ребер, пяти- и шестиугольных граней имеет фуллерен, у которого:

- а) число вершин V равно 2021,
- б) число ребер E равно 2021,
- в) число граней F равно 2021.

Всего – 6 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 2. Спираль коронавируса

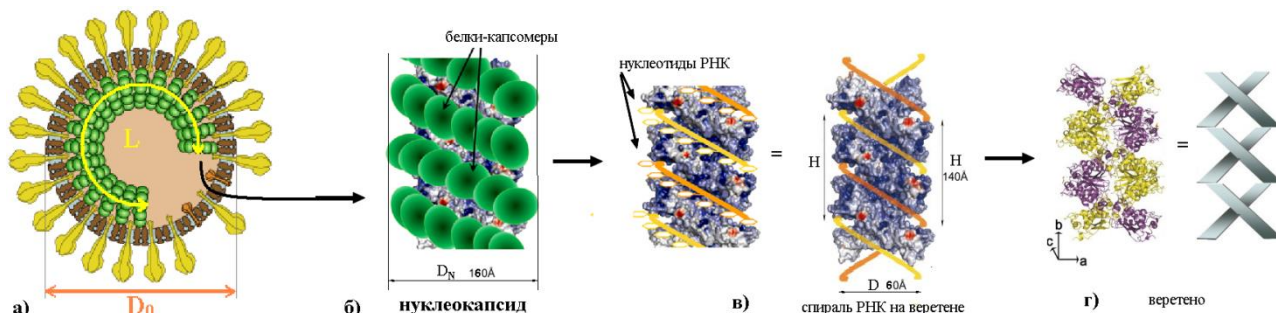


Рис. 1.

Вся наследственная информация вируса SARS-CoV-2 представляет собой единичную цепочку РНК. Внутри сферической оболочки вирусной частицы (рис. 1а) эта цепочка намотана (в двух направлениях – туда и обратно) на белковое веретено (рис. 1в, 1г) и «инкрустирована» белками в спиральный нуклеокапсид (рис. 1б).

Оцените число витков спирали РНК, длину нуклеокапсида SARS-CoV-2 **L (4 балла)**, а также диаметр вирусной частицы **D₀**. **(3 балла)**

Известно, что:

- нуклеокапсид занимает 60 % от объема вирусной частицы,
- цепочка РНК SARS-CoV-2, состоит примерно из 30000 букв-нуклеотидов,
- длина одного нуклеотида в цепочке РНК составляет 0,5 нм,
- диаметр РНК спирали на белковом веретене составляет **D = 6 нм**, шаг одной спирали составляет **H = 14 нм** (рис. 1в),
- диаметр нуклеокапсида составляет **D_N = 16 нм**.

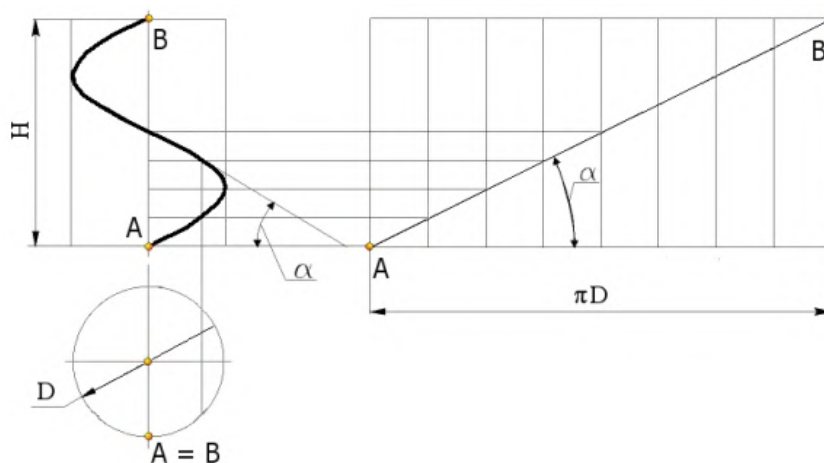


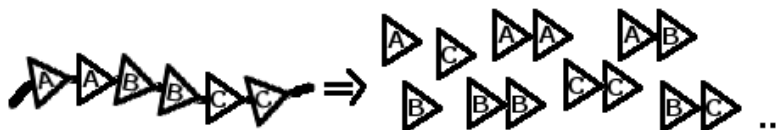
Рис. 2. Схематическое изображение спирали: **D** – диаметр, **H** – шаг, **α** – угол подъема спирали. При разворачивании цилиндра, на который «намотана» спираль, она изобразится в виде прямой. Длина отрезка **AB** называется длиной витка спирали.

Всего – 7 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 3. Полипептид как цепочка букв



Некоторый полипептид можно представить как последовательность, в которую в определенном порядке «конец-к-началу» связаны «буквы» аминокислотных остатков.

Одна из распространенных задач при изучении полипептидов – установление их первичной структуры, то есть, восстановление порядка «букв» исходной последовательности, по структуре фрагментов, образующихся при разрыве одной или нескольких связей между аминокислотными остатками.

1. Установите исходную последовательность «букв» в полипептиде **X** (**4 балла**), если известно, что:
 - а) при любом разрыве ровно половины связей между «буквами» так, чтобы разорванные связи чередовались с целыми, получается лишь пять двухбуквенных структур: FP, LF, OL, PV и VO. О какой структурной особенности полипептида это свидетельствует?
 - б) существуют некоторые варианты одновременного разрыва двух связей в пептиде, при каждом из которых получается по одному полипептиду длиной 5 букв.
2. Рассмотрим все возможные способы разрыва двух случайных связей в **X**.
 - а) Сколько таких способов существует? (**0,5 балла**)
 - б) Фрагменты какой длины можно получить таким образом? (**0,5 балла**)
 - в) Сколько вариантов структуры имеет каждый из фрагментов фиксированной длины? (**1 балл**)
 - г) Какова вероятность того, что в результате случайного разрыва двух связей получится фрагмент, описанный в пункте 1б? (**1 балл**)
3. Сколько разных структур фрагментов можно получить, разрезая исходный полипептид **X** всеми возможными способами? (**1 балл**)

Всего – 8 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 4. Каркасные молекулы нитрида бора

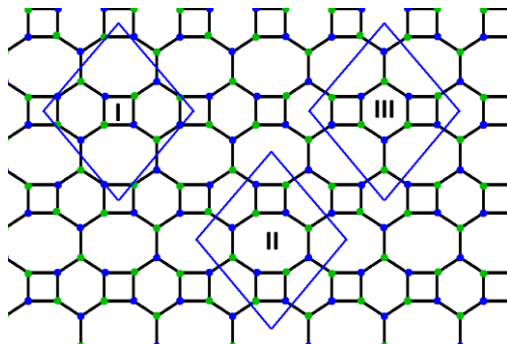


Рис. 1. Выбор базового ромба на двумерной сетке BN.

Нитрид бора B_xN_x способен образовывать двух- и трехмерные структуры, во всех вершинах которых сходится по три ребра. При этом ребро всегда соединяет только разнородные атомы. «Выкройка» некоторых каркасных молекул B_xN_x может быть построена на сетке BN, представленной на рис. 1. Базовым элементом такой «выкройки» выступает ромб, стороны которого являются единичными отрезками косоугольной системы координат.

1. Рассчитайте длину единичного отрезка L , если длина всех ребер двумерной сетки равна a , а четырех- и шестиугольники являются правильными. Чему равны углы между единичными отрезками? **(3 балла)**
2. Какой выпуклый многогранник A можно составить из базовых элементов? **(1 балл)**
Какие из вариантов (I – III) расположения базового элемента позволяют получить «выкройку» B_xN_x ? Свой ответ обоснуйте. **(1,5 балла)**
3. На сетке, приведенной на рис. 2, постройте «выкройку», отвечающую самой маленькой каркасной молекуле B_xN_x . Рассчитайте для нее величину x , число ребер, четырех-, шести- и восьмиугольников. **(2 балла)**
4. Увеличивая число (n) единичных отрезков, приходящихся на ребро многогранника A , можно получать каркасные молекулы B_xN_x разного размера. Выведите зависимость $x(n)$. **(0,5 балла)**

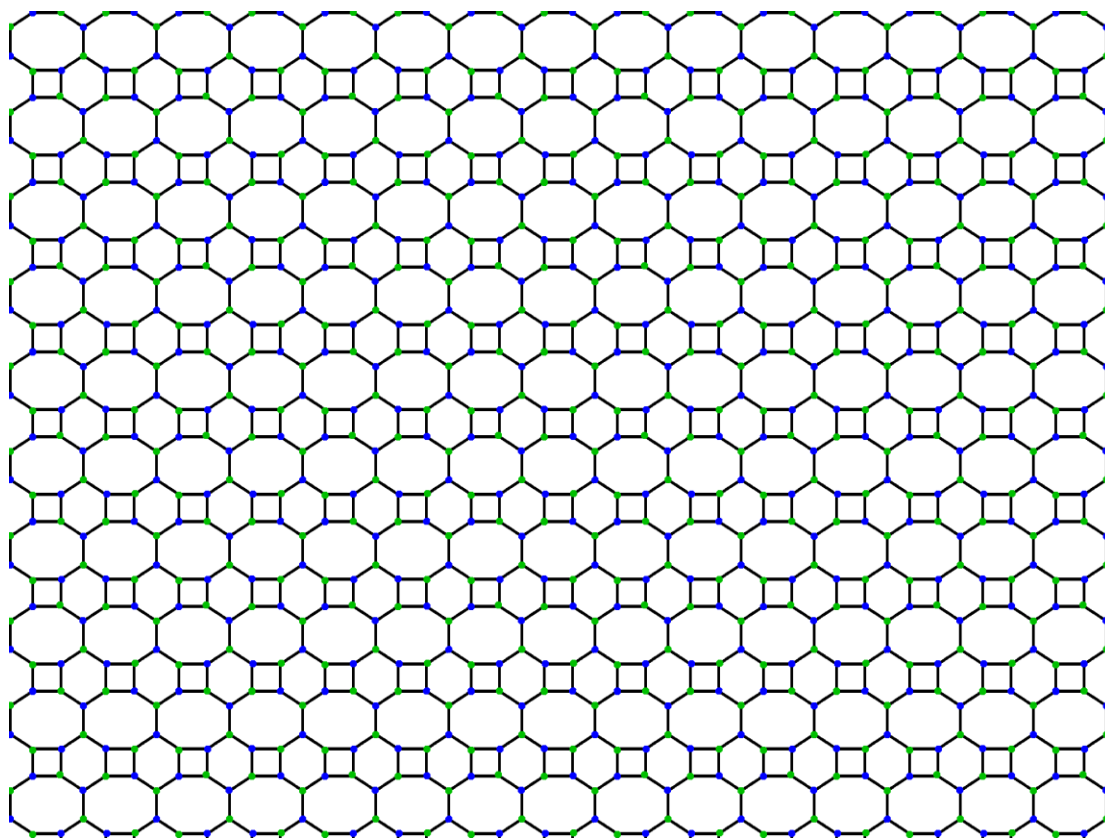


Рис. 2. Двухмерная сетка BN.

Всего – 8 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 5. Нанопористое углеродное волокно

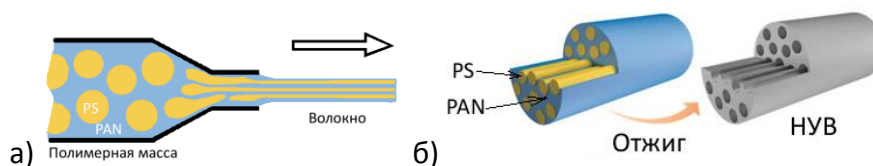


Рис. 1. а) Композитное волокно, внутри которого в матрице полиакрилонитрила (PAN) расположены нити полистирола (PS), получается путем формования массы PAN с PS. б) При отжиге композитного волокна из матрицы удаляется полистирол, а сама она превращается в углерод: получается нанопористое углеродное волокно (НУВ).

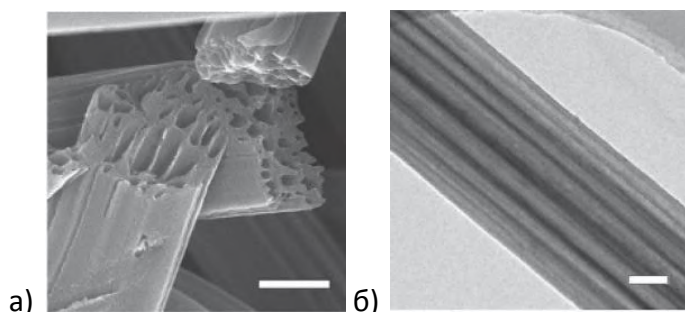


Рис. 2. Микрофотографии НУВ:
а) скол волокна и б) вид «на просвет»;
длина масштабного отрезка
а) 300 нм, б) 150 нм.

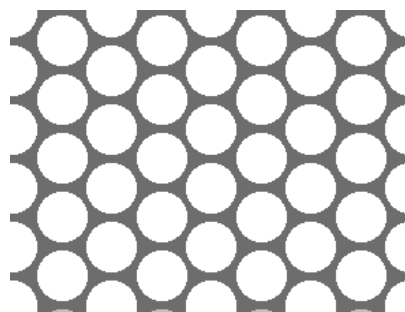


Рис. 3. Модель взаимного
расположения пор в
плоскости, перпендикулярной
оси волокна.

Рассмотрим реально полученное НУВ (рис. 2), которое имеет следующие параметры:

- диаметр, равный $D = 600$ нм;
- расстояние между порами, равное $h = 7$ нм;
- плотность углерода, из которого состоит матрица НУВ, равную $\rho = 1,45$ г/см³;
- удельную площадь поверхности НУВ, равную $S_{уд} = 145$ м²/г.

Будем считать, что:

- волокно имеет форму цилиндра;
- все поры являются цилиндрами диаметром d , расположенными параллельно оси волокна;
- расположение пор друг относительно друга соответствует рис. 3.

1. Выведите формулы зависимости

а) $S_{уд}$ от d , D , ρ (1,5 балла),

б) доли пор в поперечном сечении волокна δ от h , d . (1,5 балла)

2. Рассчитайте возможные значения d для рассматриваемого НУВ. (3 балла)

3. Какое из полученных значений d отвечает микрофотографии реального НУВ (рис. 2)? (1 балл) Рассчитайте для него объемную долю пор в волокне ω . (1 балл)

Всего – 8 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 6. Ошибка тест-системы

Один из способов выявить, болеет ли человек COVID-19 – это проведение ПЦР-теста, когда мазок, взятый у потенциального больного, анализируют на присутствие вирусного генома.

Однако тесты могут ошибаться, давая как ложноположительные, так и ложно отрицательные результаты. Предварительные исследования некоторой тест-системы показали, что ее чувствительность¹ составляет 90 %, а специфичность² – 99 %.

1. Оцените, какова вероятность получить:

- а) ложноположительный (человек здоров, но тест показывает наличие вируса),
- б) ложноотрицательный (человек болен, но тест показывает отсутствие вируса)

результат при использовании тест-системы, если в данный момент болеет 5% жителей. **(6 баллов)**

2. Какова вероятность, что один и тот же здоровый человек получит два ложноположительных результата подряд? Исходы тестов считать независимыми. **(3 балла)**

¹ Чувствительность теста – процент больных людей, которые корректно определены тестом как больные.

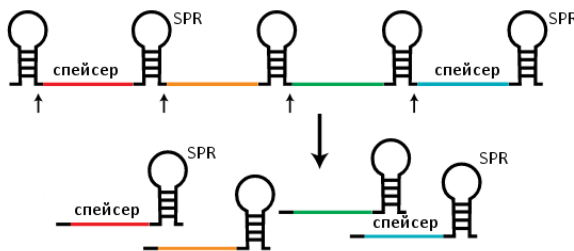
² Специфичность теста – процент здоровых людей, которые корректно определены тестом как здоровые.

Всего – 9 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 7. Поиск CRISPR в геноме *E. Coli*



Нобелевская премия по химии 2020 года была присуждена за развитие метода редактирования генома, базирующегося на использовании системы адаптивного иммунитета бактерий, направленной на борьбу с вирусами.

Основа этой системы – особые последовательности нуклеотидов¹ – короткие палиндромные² кластерные повторы или CRISPR (Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats), впервые обнаруженные в 1987 году в геноме бактерии кишечной палочки *Escherichia coli*. Короткие палиндромные повторы (SPR) в системе CRISPR отделены друг от друга так называемыми спейсерами – последовательностями нуклеотидов, являющихся фрагментами (до 80 нуклеотидов длиной) генома вирусов, с которыми бактерия сталкивалась ранее.

В тексте генома³ *E. Coli* найдите нуклеотидные последовательности, отвечающие

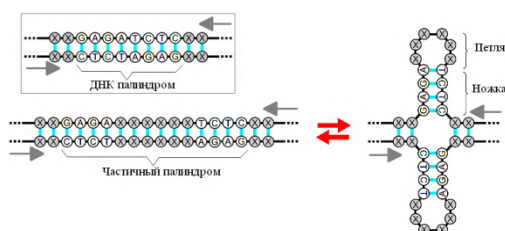
- а) SPR вида .GGTTTATCCCCGCT..CGCGGGGAAC.C (здесь точка обозначает, что на данной позиции может находиться любой символ) **(6 баллов)**
- б) и разделяющим их спейсерам **(5 баллов)**,

а также их длины и порядковые номера первых нуклеотидов этих последовательностей.

Для выполнения задания напишите программу (программы) (на любом языке программирования, к решению приложите исходный код), которая выполнит нужные действия и выведет на экран найденную информацию.

¹ Молекула ДНК состоит всего из четырех «букв»-нуклеотидов – **A, C, G, T**. «Буквы» ДНК из одной цепочки способны связываться попарно (**A ↔ T, G ↔ C**) с буквами из противоположной цепочки, называемой комплементарной.

² ДНК-палиндромом называется такая последовательность ДНК, прочтение которой совпадает с прочтением в обратном направлении по комплементарной цепочке. Например, последовательность **АТТА** – «обычный» палиндром, а последовательность **ААТТ** – ДНК-палиндром.



³ Бактерия *E. Coli* (кишечная палочка) является одним из удобных модельных организмов в биологии, а геном ее лабораторного штамма K-12 был расшифрован одним из первых. Для выполнения этого задания сохраните по ссылке <http://enanos.nanometer.ru/uploads/archive/ecoli.zip> со страницы задачи (~1,3 MB) файл генома штамма K-12 *E.Coli*, который состоит из одной непрерывной строки, содержащей только буквы **A, G, T, C**.

Всего – 11 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 8. Супертетраэдр и Супертетраэдр Серпинского

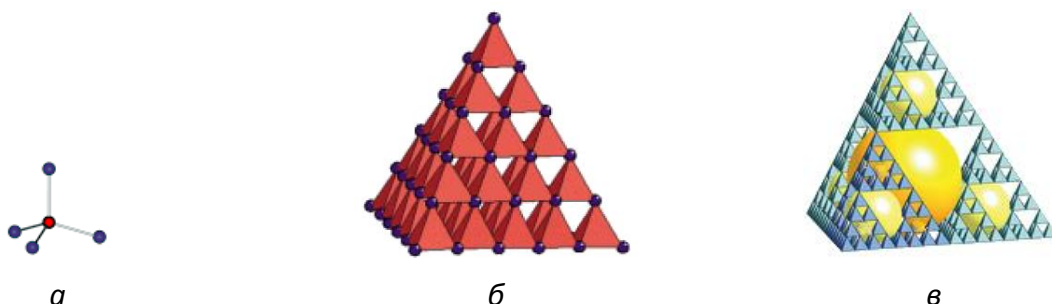


Рис. 1. а) Структура единичного тетраэдра MY_4 .

б) Пример сложенного из MY_4 супертетраэдра пятого поколения T_5 .

в) Пример сложенного из T_2 супертетраэдра Серпинского третьего поколения $S_3(T_2)$.

Некоторые бинарные соединения M_aY_b , в структуре которых атом металла M имеет тетраэдрическое окружение из атомов Y (рис. 1а), могут образовывать нанокластеры в форме супертетраэдров T_n (рис. 1б). Число тетраэдров MY_4 (n), приходящееся на ребро T_n , называется поколением супертетраэдра.

1. Найдите количество атомов M a_T и атомов Y b_T для

а) T_5 , (1,5 балла)

б) T_n . (3 балла)

Обратите внимание: в точках касания тетраэдры MY_4 имеют общие атомы Y .

Если взять четыре T_2 и из них, как из базовых фигур, сложить новый супертетраэдр второго поколения, а потом повторить операцию уже для этого супертетраэдра, и так несколько раз, то получится тетраэдрический кластер с фрактальной структурой (рис. 1в) – так называемый супертетраэдр Серпинского $Sm(T_2)$. Общее число этапов усложнения его структуры m называется поколением.

2. Найдите количество атомов M a_S и атомов Y b_S для

а) $S_3(T_2)$, (2 балла)

б) $Sm(T_2)$. (4 балла)

Полости в супертетраэдрах Серпинского можно использовать для хранения частиц-гостей.

3. Форму какого многогранника имеет центральная полость супертетраэдра Серпинского? (1,5 балла)

4. Рассчитайте размер нанокластера $S_2(T_2)$, а также максимальный диаметр сферической частицы, которая поместится в его полости, если расстояние между M и Y в MY_4 составляет $d = 0,24$ нм. Все атомы считать точечными. (3 балла)

Для решения задачи можно воспользоваться формулой n -го тетраэдрального числа

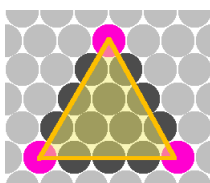
$$Td_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6.$$

Всего – 15 баллов

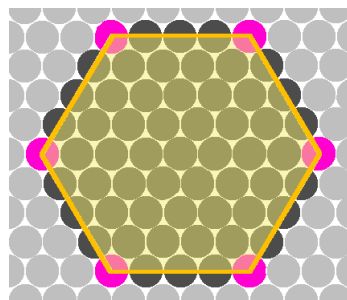


Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 9. Поиск простейших ПМК с шестиугольными и треугольными гранями



а



б

*Рис. 1. Примеры «выкройки» на листе металла отдельных граней кластера:
а) треугольной, б) шестиугольной.*

На каждое ребро в данном примере приходится по $n = 5$ атомов металла.

Рассмотрим полый металлический кластер (ПМК) в форме выпуклого многогранника X , грани которого являются равносторонними треугольниками (рис. 1а) и шестиугольниками (рис. 1б), а в каждой вершине сходится по y ребер.

1. Какие значения может принимать y ? **(1 балл)**
2. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, для каждого y найдите многогранник Xy с минимальным числом вершин. Опишите, сколько вершин, ребер, треугольных и шестиугольных граней имеет каждый из найденных Xy . **(4 балла)** На схеме листа из атомов металла (рис. 2) постройте «выкройки» ПМК, отвечающие этим Xy , и назовите каждый из них. **(3 балла)**
3. Для каждого многогранника Xy выведите зависимость общего числа атомов металла $N(n)$. **(4 балла)** Рассчитайте $N(2)$ для каждого из них. **(1 балл)**

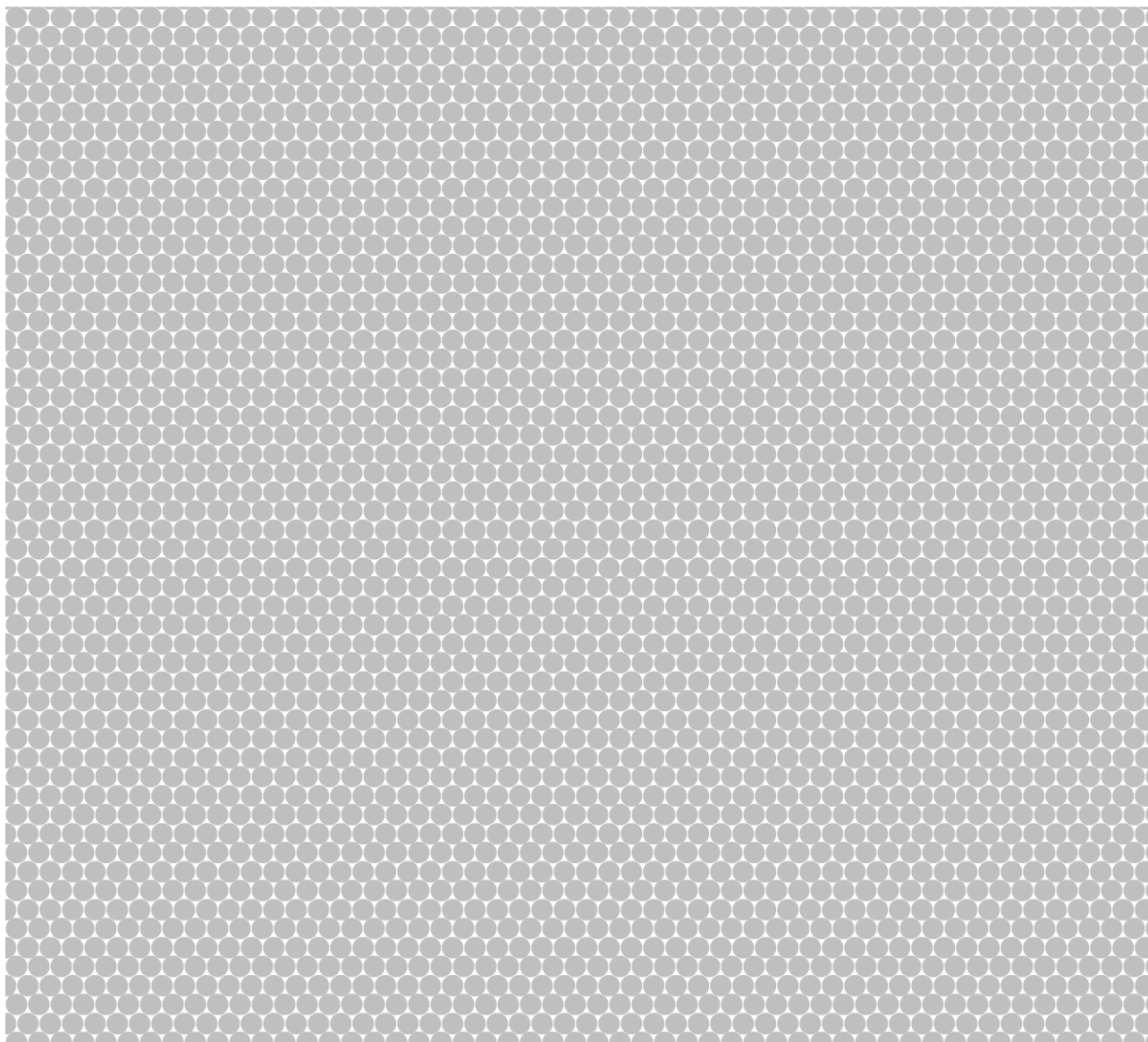


Рис. 2. Схема листа из атомов металла.

Всего – 13 баллов



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 10. Биметаллический кубookтаэдр

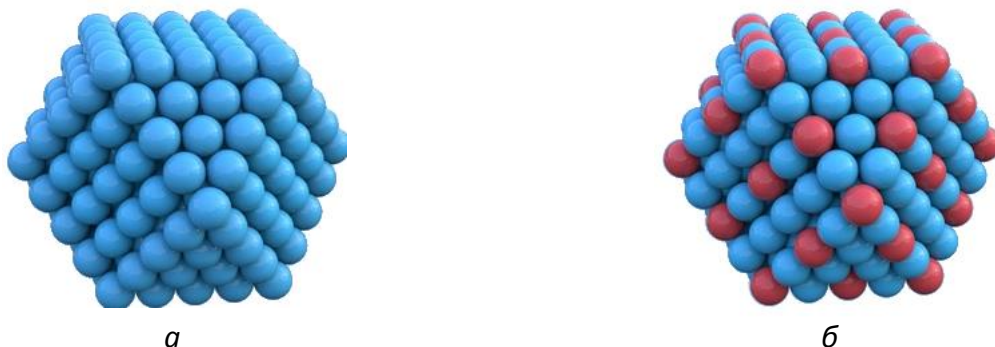


Рис. 1. Трехмерная модель нанокластера в форме кубookтаэдра¹, на ребро которого приходится 5 атомов металла:

а) нанокластер **A**; б) биметаллический нанокластер **A_xB_y** (голубой – **A**, красный – **B**).

Для повышения каталитической активности часть атомов в структуре металлических нанокластеров **A** (рис. 1а) заменяется на атомы второго металла **B** таким образом, что между любыми соседними атомами **B** расположен один атом **A** (рис. 1б).

Одним из параметров, определяющих каталитическую активность **A_xB_y**, является **δ** – отношение числа атомов **B**, расположенных на поверхности нанокластера, к общему числу атомов поверхностного слоя.

1. Какой атом находится в центре **A_xB_y**? (0,5 балла) Сколько атомов **B** находится в поверхностном слое **A_xB_y**, на ребро которого приходится:

- а) 5 атомов? (0,5 балла)
- б) $n = 2k$ атомов? (0,5 балла)
- в) $n = 2k + 1$ атомов? (1,5 балла)

Здесь **k** – натуральное число.

2. Рассчитайте **δ** для **A_xB_y**, на ребро которого приходится:

- а) 5 атомов; (1 балл)
- б) n атомов; (2 балла)
- в) бесконечно большое число атомов. (2 балла)

3. Чему равно соотношение **y:x** в нанокластере **A_xB_y**, на ребро которого приходится:

- а) 5 атомов? (1 балл)
- б) n атомов? (3 балла)
- в) бесконечно большое число атомов? (3 балла)

¹Общее число атомов в нанокластере в форме кубookтаэдра составляет

$$N = (10n^3 - 15n^2 + 11n - 3)/3,$$

где **n** – число атомов, приходящееся на ребро кубookтаэдра.

Всего – 15 баллов